第二分册目次

第一章　複變數函數論的基礎

1．複變數函數　在講微積分的時候，我們假定自變數和他的函數都祇取實數值。進之，當我們考察最初等的函數，卽多項式，以作研究高等代數的基礎時，便要討論到自變數取複數值時的情形了。本章的目的就是要把解析學的基礎推廣到複變數函數的情形。

例如取一多項式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,$$

其中 a_k 都是已知的複數。假如我們現在讓自變數 z 也能取任意的複數值的話，那末對於 z 的任何複數值，函數 $f(z)$ 就是有意義的。相仿的，對有理函數

$$\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m},$$

或具有根號的函數，如　　$\sqrt{z-1}$，

都可以這樣去解釋他。

在第一卷第六章裏我們曾定義了一些當自變數取複數值時的初等超越函數。卽對於指數函數有：

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)。$$

藉這樣定義的指數函數又可以定義複變數的三角函數

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};$$

(1) $$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\frac{e^{i2z}-1}{e^{i2z}+1};$$

$$\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\,\frac{e^{i2z}+1}{e^{i2z}-1}。$$

再回憶複數的自然對數的定義：

(2) $$\lg z=\lg|z|+i\arg z,$$

其中$|z|$是z的模，$\arg z$是z的輻角。藉此考慮(1)式中諸函數的反函數，就引向複變數的反三角函數

$$\arcsin z,\ \arccos z,\ \operatorname{arctg} z,\ \operatorname{arcctg} z。$$

不難說明，這些函數能夠通過對數來表示。

例如，設 $$z=\operatorname{tg} w=\frac{e^{i2w}-1}{i(e^{i2w}+1)},$$

則 $$i(e^{i2w}+1)z=e^{i2w}-1,$$

或 $$e^{i2w}=\frac{1+iz}{1-iz}。$$

分子分母同以 i 乘，再取對數，得

$$w=\operatorname{arctg} z=\frac{1}{2i}\lg\frac{i-z}{i+z}。$$

完全一樣，如令 $$z=\sin w=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i},$$

則得 e^{iw} 的二次方程 $$e^{2iw}-2iz\,e^{iw}-1=0,$$

因此 $$e^{iw}=iz\pm\sqrt{1-z^2},$$

從而 $$w=\frac{1}{i}\lg(iz\pm\sqrt{1-z^2}),$$

這裏根號應當取正負兩種數值。

以後就會看到，所有上述這些複變數的初等函數都有導數，且這些

導數也是複變數函數。就是說，對這些函數，比率

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

當複改變量 Δz 趨向零時有一定的極限值。這一章的全部就在替有導數的複變數函數的理論奠一個基礎。我們將會看到這套理論一方面是以非常嚴格和簡潔著稱，而另一方面在許多自然科學和專門技術的部門中又有他廣大的應用。本章中先說他的理論的大概，在以後各章裏面再講他的應用。我們希望用這辦法可以達到比較嚴格和簡潔的行文。

以後我們常要用到複數的幾何解釋法，這早在[I, 170]中已講過。現在再略述其中的一些基本概念。在平面中取直角坐標軸 OX 和 OY，那末對平面上每點就可以兩個實數坐標 (x, y) 或一個複數坐標 $x+iy$ 和他對應，後者是我們以後要用的。在這意義下，平面稱為複平面，X 軸稱為實軸，Y 軸稱為虛軸。對於複數除了這種點的解釋法以外，在以後各章中我們主要地還要用到一種向量的解釋法，那就是對於複數 $x+iy$ 以一個在兩坐標軸方向的支量為 x 及 y 的向量和他對應。這兩種解釋之間的關係是很顯然的。即如從原點到 $x+iy$ 點引一向量，那末牠就是對應於複數 $x+iy$ 的向量了。一般，如平面上一向量的起點 A 的坐標是 a_1+ia_2，終點 B 的坐標是 b_1+ib_2，則向量 $\overline{AB}$ 所對應的複數就等於終點坐標與起點坐標之差，即

$$(b_1-a_1)+i(b_2-a_2)。$$

關於複數的加減乘除，可以參看[I, 170 和 172]。兩個複數的和所對應的向量是各個複數所對應的向量的和。複數的模就是他所對應的向量的長度，輻角就是這向量和 X 軸的交角。當複變數 z 變動時，對應點也就在平面上移動。

我們稱 $z=x+iy$ 趨向極限 $\alpha=a+ib$，這裏 a 和 b 是常數，假如 z 和 α 之差的模

$$|\alpha-z|=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}$$

趨向零。

因爲上式根號裏面兩項都是正的，故知 $|\alpha-z|\to 0$ 實與

$$x\to a,\quad y\to b$$

兩式相抵。因之 $\qquad x+iy\to a+ib$

也就和 $\qquad x\to a,\quad y\to b$

兩式相抵了。

由此顯然可見坐標爲 $z=x+iy$ 的變動點 M 趨向坐標爲 $\alpha=a+ib$ 的固定點 A 的意義實與通常平面上一點趨向其極限位置的意義符合。不難證明普通關於極限之加減乘除的定理對複變數也一樣成立，這我們不想詳細說了。

又由上述極限的定義容易知道 $z\to 0$ 和 $|z|\to 0$ 相抵。如果 $z\to\alpha$，則 $|z|\to|\alpha|$。

對複變數，勾犀判別極限存在的準則也成立。例如設

$$z_1=x_1+iy_1;$$
$$z_2=x_2+iy_2;\ \cdots;$$
$$z_n=x_n+iy_n;\ \cdots$$

爲一複數級列。這級列極限的存在和兩實數級列 x_n 與 y_n 的極限都存在相抵。但後兩極限存在的充要條件是：對所有充分大的 n 和 m，$|x_n-x_m|$ 和 $|y_n-y_m|$ 可任意小。參看[I, 31]。

但由 $\qquad |z_n-z_m|=\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2}$

及根號裏面兩項皆爲正，可知 z_n 的極限存在的充要條件是：對所有充分大的 m 和 n，$|z_n-z_m|$ 可任意小。嚴格些說就是：對任一已給正數 ε，

存在一正整數 N，使 $|z_n-z_m|<\varepsilon$，祇要 n 和 m 都大於 N。一般，複變數 z 的行程不一定是如上所設的可數點集。那末我們應該仿照[I, 25]一樣在 z 的全部行程中定出一個次序來。而極限存在的充要條件就可以這麼說：對任一已給正數 ε，存在 z 之一值 z_0，使得 $|z'-z''|<\varepsilon$，祇要 z' 和 z'' 是任意兩個在 z_0 後面的 z 的值。又以後我們稱複變數 z 趨向無限，如果 $|z|\to+\infty$。

現在我們回過來看複變數函數

$$w=f(z),$$

並約定幾個名詞。函數 $f(z)$ 可以在整個複平面上都有定義，也可以祇在平面上某一區域內有定義，如圓，長方形，環，等等之內。在所有這些區域裏面，我們可以區別他的內點和境界點。例如當這區域是以原點做中心的單位圓時，其內點就是滿足條件

$$|z|<1 \quad 或 \quad x^2+y^2<1$$

的點的全體。境界點的全體就是圓周

$$|z|=1 \quad 或 \quad x^2+y^2=1。$$

區域的內點的特徵是：不但他們自己，並且他們有一個鄰域全部屬於這個區域。換句話說，一點 M 是某區域的內點，假如有一個以 M 做中心的很小的圓全部屬於此區域的話。區域的境界點雖然不是他的內點，但在其任意小的鄰域中一定有區域的內點存在。此外，還要規定我們的區域並不分爲許多分開的小塊（區域之連通性）。換言之，我們將常假定區域中任何兩點都可以用一條線連接起來，這條線上面的點全部屬於這個區域。依照慣例，以後我們用到區域這兩字時，就祇指他的內點的全體。如果連境界點也在內的話，我們就稱他做閉區域。此外，如一區域中所有的點和原點的距離都小於一個有限數，則此區域稱爲有界。關於區域的其他特徵將在以後補充。

現在再回頭來考察函數 $w=f(z)$。假設這函數係在某一區域 B 的內部所定義，即對 B 內部任一點 z，$f(z)$必有一定的複數值(我們祇說單值函數)。設 z_0 為 B 中一點，如果當 $z\to z_0$ 時，$f(z)\to f(z_0)$，則稱函數 $f(z)$在 z_0 為連續。這就是說，對任一已給正數 ε，存在一正數 η，使當$|z-z_0|<\eta$ 時有$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$。若 $f(z)$在 B 中每一點都連續，則稱他在 B 中連續。函數 $f(z)$有時不但可在 B 中有定義，並且也可以在 B 的境界線 l 上有定義，即 $f(z)$在閉區域 B 中有定義。這時若 $f(z)$在閉區域 B 中每一點都連續，則稱 $f(z)$在閉區域 B 中為連續。當定義函數在境界線 l 上一點 z_0 的連續性時，須注意這時 z 可以用任何方式趨向 z_0，但不能離開閉區域 B。和實變數一樣，[I, 43]的定理仍成立：若 $f(z)$在閉有界區域中為連續，則在這區域中必為一致連續。就是說，對任一已給正數 ε，存在一正數 η(對全區域祇有一個)，使當$|z_1-z_2|<\eta$ 時，$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$，這裏 z_1 和 z_2 是閉區域中任意兩點。

把 z 和 $w=f(z)$分寫做實數部份和虛數部份：

$$z=x+iy;$$

$$w=f(z)=u+iv\text{。}$$

給 z 一值就是給 x 和 y 各一值，給 $f(z)$ 一值就是給 u 和 v 各一值，因此 u 和 v 必定是 x 和 y 的函數：

$$w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)\text{。} \tag{3}$$

對於初等函數，祇須用簡單的運算就可把實數部份和虛數部份分開。例如：

$$w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy\text{。}$$

置 $z_0=x_0+iy_0$，由前知 $z\to z_0$ 與 $x\to x_0$, $y\to y_0$ 兩式相抵。

如果函數在 z_0 點為連續，那末當 $z\to z_0$ 時，即 $x\to x_0$, $y\to y_0$ 時，應有

$$f(z)\to f(z_0),$$

或 $$u(x, y)+iv(x, y)\to u(x_0, y_0)+iv(x_0, y_0),$$

這和
$$u(x, y)\to u(x_0, y_0)$$
$$v(x, y)\to v(x_0, y_0)$$
兩式相抵。因此知道 $f(z)$ 在 z_0 點爲連續與 $u(x, y)$，$v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 點爲連續相抵。

把函數分開做實數部份和虛數部份，再用初等實函數的連續性質，我們可以證明多項式，e^z，$\sin z$，$\cos z$ 等都是全平面上的連續函數。有理分式也是處處連續，除了那些使他的分母爲零的點以外。

要講更進一步的理論，我們得先講單值函數，以後再特別考慮多值函數的問題。多值函數例如 $\sqrt{z-1}$，$\lg z$ 以及反三角函數等都是。

2. **導數**　假設 $f(z)$ 在 z 點和他的某一鄰域內已有定義。導數 $f'(z)$ 我們已經照常例定義做比率

$$\frac{f(z+\varDelta z)-f(z)}{\varDelta z} \tag{4}$$

的極限。這時極限值須是有限。並且不論複改變量 $\varDelta z$ 依照什麼規律趨向零，極限值常爲一定。

和實變數的情形一樣，不難證明求導數時常數因子可以拿到導數符號之外來，並且通常關於和，積，商的微分的定理對複函數也一樣成立[I, 47]。此外，用牛頓二項式公式易證關於指數爲正整數的冪函數的微分規則[I, 47]對複函數也成立：

$$(z^n)'=nz^{n-1}。 \tag{5}$$

這樣我們就可斷言多項式在任何一點 z 的導數都存在，而有理分式則除在使他的分母爲零之點以外處處有導數。

進之，通常關於複合函數的微分規則也成立：

$$F'_z(w)=F'_w(w)\cdot w'_z。 \tag{6}$$

當然，這時等式右邊兩個導數都要存在。又和實變數一樣，如果 $f(z)$ 在某點的導數存在，那末他在這點必為連續[I, 45]。

如果函數 $f(z)$ 在某區域 B 中已有定義，而且在 B 裏面的每一點都有導數，就簡稱 $f(z)$ 在區域 B 中有導數。這導數也是 B 中的單值函數。

現在引進一個新的重要的定義。我們稱 $f(z)$ 在 B 中為正則，如果他在 B 中為單值而且有連續的導數 $f'(z)$。由前所述，可知這時 $f(z)$ 在 B 中當然為連續。有時也稱 $f(z)$ 在一點 z_0 為正則，這是指 $f(z)$ 在包含 z_0 的某一區域中為正則的意思。

回到(3)式，在那裏 z 和 $f(z)$ 都被分開成實數部份和虛數部份，我們問：函數 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 應該滿足什麼條件時，$f(z)$ 纔能在 B 中為正則。現在先假設 $f(z)$ 在 B 中為正則，看由此可以引出關於 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的什麼結果來。

我們早已說過，當導數存在時，其值和複改變量 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 趨向零的方式無關。今在 B 中任取一點 M，坐標為 $z=x+iy$，又取一動點 N，坐標為 $z+\Delta z=(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)$，且 N 趨向 M。現在試看 N 趨向 M 的兩種不同方式。第一種方式是：N 沿一平行於 X 軸的直線趨向 M。這時有：

(7) $$\Delta y=0 \quad 而 \quad \Delta z=\Delta x。$$

第二種方式是：N 沿一平行於 Y 軸的直線趨向 M。這時有：

(8) $$\Delta x=0 \quad 而 \quad \Delta z=i\Delta y。$$

現在對這兩種情形來求 $f'(z)$。在一般情形我們有：

(9) $$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y)]+i[v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x, y)]}{\Delta x+i\Delta y}。$$

因此當 N 照第一種方式趨向 M 時，有：

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,\ y)-v(x,\ y)}{\Delta x}\right]。$$

這樣，等式右邊的實數部份和虛數部份就都應該有極限，就是說，函數 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 應該有關於 x 的偏導數，並且下式成立：

$$f'(z)=\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial x}。\tag{10}$$

同樣，如果 N 照第二種方式趨向 M 的話，則由(8)和(9)應有：

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{i}\left[\frac{u(x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)}{\Delta y}+i\frac{v(x,\ y+\Delta y)-v(x,\ y)}{\Delta y}\right]$$

或

$$f'(z)=\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}。\tag{11}$$

比較(10)和(11)的右邊，就得到 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 應滿足的條件：

$$\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y};\qquad \frac{\partial v(x,\ y)}{\partial x}=-\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}。\tag{12}$$

注意：由 $f'(z)$ 的連續性和(10)，(11)兩式可知 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 有連續的一階偏導數。由以上的論斷我們得到下面的結果：要 $f(z)$ 在 B 中為正則，必須 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 在 B 中有關於 x 和 y 的連續一階偏導數，並且這些偏導數要滿足(12)式中的兩個關係。

現在再證明這些條件對 $f(z)$ 在 B 中為正則不但是必要而且也是充分的。為此，我們假定上面的條件已經成立，再來證明 $f'(z)$ 的存在和連續。由假設 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 關於 x 和 y 的一階偏導數都是連續的，所以可寫[I、68]：

$$u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)=\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

$$v(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-v(x,\ y)=\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y,$$

其中 ε_k 和 Δx, Δy 一齊趨向零。利用上二式求出函數$f(z)$的改變量 $f(z+\Delta z)-f(z)$,代入(4)式得:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

利用(12)式的條件,上式可改寫爲:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+\varepsilon_5\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}+\varepsilon_6\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

其中 $\varepsilon_5=\varepsilon_1+i\varepsilon_3,\quad \varepsilon_6=\varepsilon_2+i\varepsilon_4$

和 Δz 一齊趨向零。

易知上面的等式右邊最後兩項也趨向於零。例如:

$$\left|\varepsilon_5\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}\right|=|\varepsilon_5|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},$$

右邊第一個因子趨向零,而第二因子不大於一。

這樣我們就有

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial x}+\varepsilon_7,$$

其中 ε_7 和 Δz 一齊趨向零,而等式右邊前面兩項和 Δz 無關。因此,(4)式的比率就趨向一定的極限,恰如(10)式所定義的一般,而前述條件是 $f(z)$ 在 B 中爲正則的充要條件也就得以證明了。(12)中兩等式通常稱爲勾犀黎曼方程。

其實這兩個方程我們早已經見過，就是在研究理想不可壓縮液體的穩定平面流動時，速度勢和流函數須滿足這兩個方程[II, 74]。因此我們知道複變數函數論的基本方程(12)同時也是研究流體力學的基本方程。基於這事實，複變數函數論在流體力學上有許多的應用，我們在下一章將要講到。

現在再注意一件可以由(12)式導出的重要事實。以後我們將會知道，當 $f(z)$ 爲正則時，$u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的任何階偏導數都存在。現在先用一用他們的二階偏導數存在這一件事再說。將(12)中第一式對 x 求偏導數，第二式對 y 求偏導數，相加得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\text{。} \tag{13_1}$$

同樣由(12)可導出

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\text{。} \tag{13_2}$$

由此可知，正則函數 $f(z)$ 的實數部份和虛數部份都要滿足拉普拉斯方程，這就是說，他們應該都是調和函數。在下一章中我們還要詳細研究複函數論和拉普拉斯方程間的關係。

從(13)還可以導出一件重要的事實，就是如果已知一個正則函數的實數部份，我們可以作出這個函數來。這時 $u(x,y)$ 當然是 (13_1) 的一個解，我們要證明 $v(x, y)$ 除了一個常數項以外可以唯一決定。其實，由(12)式有：

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

因此

$$v(x, y)=\int^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C\text{，} \tag{14}$$

剩下來要證明的，就是上式中線積分的數值和積分道路無關，並且是自己的上限的函數[II, 71]。回憶線積分

$$\int X dx + Y dy$$

和積分道路無關的條件可寫爲

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}。$$

把這條件用到(14)式的積分上去，得到：

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad 或 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

這方程由假設是適合的，因爲我們取 $u(x, y)$爲某一調和函數之故。注意：雖然 $u(x, y)$是單值，但如(14)式的積分所在的區域爲複通區時，$v(x, y)$卻可以是多值的 [II, 72]。

現在舉幾個例子看看。多項式顯然是全平面中的正則函數。有理分式在所有不包含分母的零點❶ 的區域中也是正則函數。例如，設 $f(z) = z^2$，則 $u(x, y) = x^2 - y^2$，$v(x, y) = 2xy$。不難證明這兩函數滿足(12)式的條件。

現在再證明指數函數

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

是全平面中的正則函數。由上式有：

$$u(x, y) = e^x \cos y; \quad v(x, y) = e^x \sin y;$$

因此就有：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y。$$

這些偏導數都是連續函數，而且滿足(12)式的條件。依照(10)式求導數：

❶函數 $f(z)$的零點就是方程式 $f(z) = 0$ 的根(譯者)。

$$(e^z)'=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)，\text{即}(e^z)'=e^z。$$

這和具實變數的指數函數的微分規則一樣。現在容易證明 $\sin z$ 和 $\cos z$ 有在全平面上爲連續的導數，並且求導數時的規則也和實變數的情形一樣。實際上，由指數函數和複合函數的微分規則有：

$$(\sin z)'=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)'=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z,$$

$$(\cos z)'=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)'=i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=-\sin z。$$

3. 保角變換　現在我們來說明函數關係和導數這兩個概念的幾何意義。設函數 $f(z)$ 在 (X, Y) 平面中一區域 B 裏面爲正則。對 B 中每一點 z 有一定複數值 $w=f(z)$。對應於 B 中點的全體，這種數值 $w=u+iv$ 的全體充滿另一區域 B_1，我們把他畫在另一複平面 (U, V) 上面(圖 1)。這樣我們就稱函數 $f(z)$ 把區域 B 變成區域 B_1。嚴格些

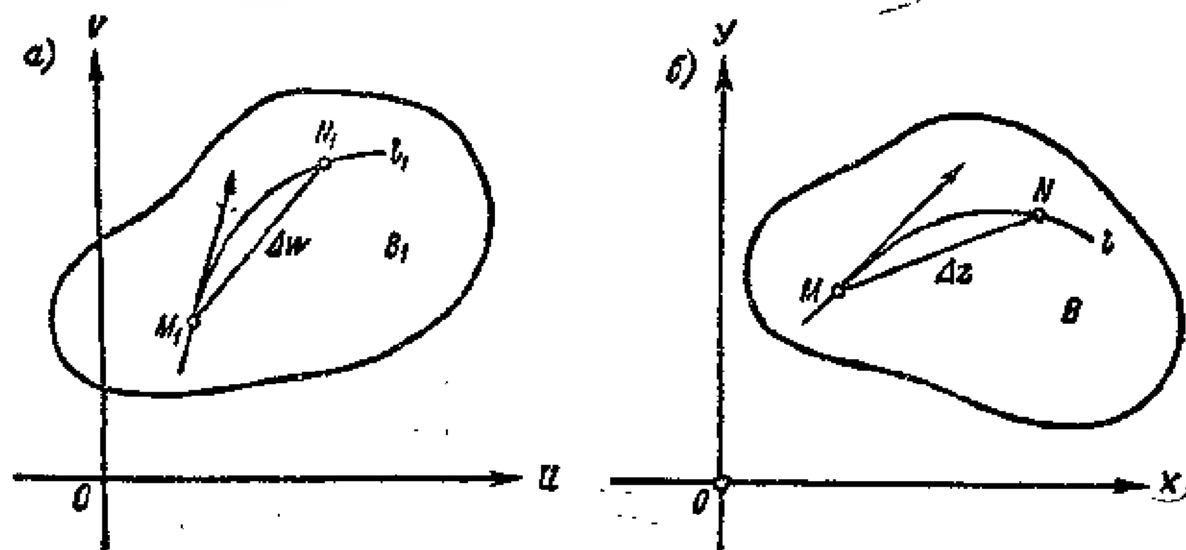


圖 1

說，我們需要更詳細地尋求在變換 $w=f(z)$ 之下兩種點 z 和 w 間的關聯，並證明 w 的全體 B_1 也是平面 (U, V) 上的一個區域。這在以後，等解析學的知識足夠時，我們會詳細去研究他。那時可以證明如果在 z

點$f'(z)\neq 0$，則以z做中心的一個相當小的圓就被$f(z)$變換做w平面上一個區域，且以$w=f(z)$這點爲內點。現在我們但講些一般的知識，祇要使讀者能夠了解前述概念的幾何意義就行了。

我們先解釋導數的模和幅角的幾何意義，但假定在我們所觀察的點導數$f'(z)\neq 0$。設在B中任取兩個鄰近點M和N，他們的坐標是z和$z+\Delta z$。設在B_1中的對應點是M_1和N_1，坐標爲w和$w+\Delta w$。如果將線段MN和M_1N_1看成向量的話，他們就表示複數Δz和Δw。這樣，兩向量長度的比就是

$$\frac{|M_1N_1|}{|MN|}=\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}。$$

因爲商的模等於模的商，所以

$$\frac{|M_1N_1|}{|MN|}=\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|。$$

當N趨向極限位置M時，N_1亦趨向極限位置M_1，故得

$$\lim\frac{|M_1N_1|}{|MN|}=|f'(z)|。$$

這就是說，導數$f'(z)$的模代表在z點的線性度量經過變換$f(z)$以後所起的變化。例如令$f(z)=z^2+z+3$，則在$z=1$點的線性度量經過變換$f(z)$以後增大了三倍。

現在再看幅角的幾何意義。設N沿一曲線l趨向M，在區域B_1中對應於l的曲線爲l_1(圖2)。複數Δz的幅角$\arg\Delta z$就是向量$\overline{MN}$和實軸所成的角，同樣$\arg\Delta w$就是向量$\overline{M_1N_1}$和實軸所成的角。兩幅角之差

$$\arg\Delta w-\arg\Delta z$$

表示向量$\overline{MN}$的方向與向量$\overline{M_1N_1}$的方向所作成的角度，這個角度由向量MN逆時針計算。因爲商的幅角等於被除數的幅角減去除數的

輻角，故

$$\arg \Delta w-\arg \Delta z=\arg \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

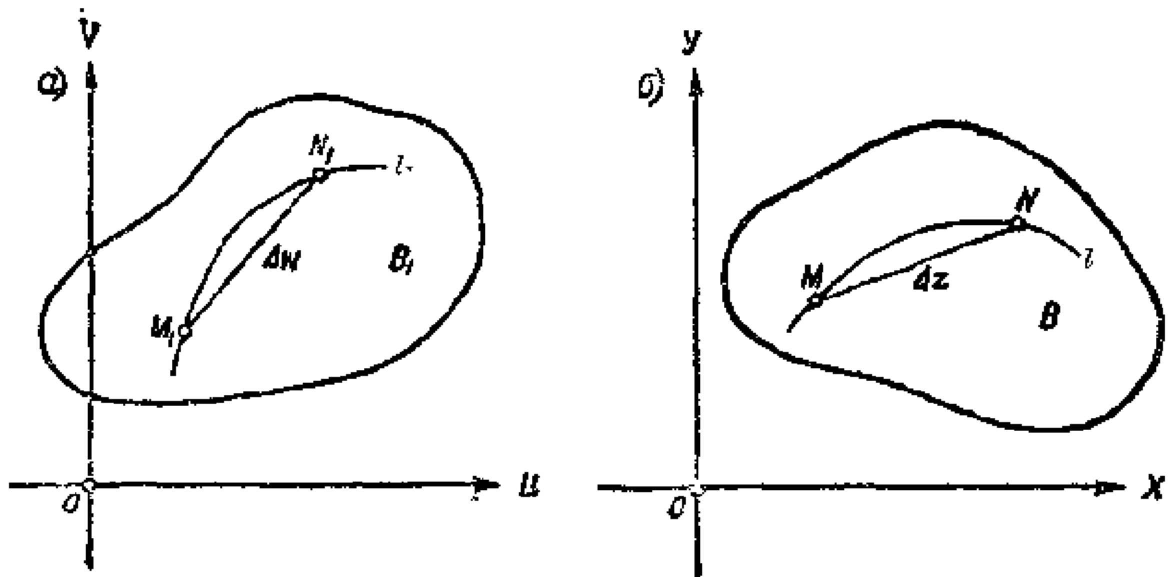


圖 2

當 N 趨向極限 M 時，向量 $\overline{MN}$ 的方向與曲線 l 在 M 點的切線方向重合，同時向量 $\overline{M_1N_1}$ 的方向與曲線 l_1 在 M_1 點的切線方向重合。

因此將前式取極限就知道 $\arg f'(z)$ 代表經過變換 $f(z)$ 以後在一點 z 所生的迴轉角。詳細些說，如果過 z 點畫任意曲線 l，l 在 z 點有一定的切線。設經變換 $f(z)$ 以後，z 的像是 w，l 的像是 l_1，那末 l_1 在 w 點的切線方向可以由 l 在 z 點的切線方向逆時針地轉一角度 $\arg f'(z)$ 而得到。如果區域 B 中任意兩條曲線在其交點 z 有一定的交角，經變換 $f(z)$ 以後，每一曲線在 z 點的切線方向和他們的像在 $w=f(z)$ 點的切線方向間的交角都等於 $\arg f'(z)$，因此 B 中兩曲線在 z 點的交角必等於 B_1 中對應曲線在 w 點的交角。就是說，在每一不使導數爲零之點，正則變換保持角度。這種保持角度的變換我們稱他做保角變換。

如果我們在 XY 平面中的區域 B 裏面取一個曲線網，那末經過變

換以後仍舊得到一個曲線網。這時曲線間的交角當然還是保持不變，祇要除了在那種使 $f'(z)$ 爲零的點。例如在區域 B 中取一平行於兩坐標軸的直線網，則在 B_1 中所得到的雖然一般已是一個曲線網，但必爲正交曲線網。進之，假如我們用許多很小的同樣的正方形遮蓋區域 B，則每一正方形在 B_1 中的像就是一個很小的彎曲矩形，其邊長約等於區域 B 中正方形的邊長乘以 $|f'(z)|$ 在對應正方形中任意一點的數值。就是說，不計高階誤差的話，B_1 中的彎曲矩形也是正方形，但因 $|f'(z)|$ 在不同的點數值可以不同，所以遮蓋 B_1 的許多彎曲正方形就可以有各不相同的邊長了。

現在再來看一看複合函數

$$F(w),\quad \text{這裏}\quad w=f(z)。$$

假設 $f(z)$ 在某區域 B 中爲正則，並且把這區域變成另一區域 B_1。又設 $F(w)$ 在區域 B_1 中爲正則。則易知複合函數 $F(w)$ 在 B 中爲正則，而且(6)式的微分規則成立。

4. 積分　設 l 爲 XY 平面中某一曲線。說到曲線，我們常假設他有如下形式的參數方程：

$$x=\varphi_1(t),\quad y=\varphi_2(t);$$

其中 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 是具有連續導數的連續函數；或更一般的，曲線可由有限個分段所組成，每一分段從頭到尾可以上述形式的兩個參數方程來表示。對這種曲線，如我們所知 [II, 66]，要求線積分

$$\int X(x,y)dx+Y(x,y)dy$$

的數值，實際上祇要計算一個普通的定積分就可以了。因爲我們祇要用 $x=\varphi_1(t)$，$y=\varphi_2(t)$，$dx=\varphi_1'(t)dt$，$dy=\varphi_2'(t)dt$ 代入上式，再求出對應於曲線 l 的 t 的上下限，就得到一個關於變數 t 的定積分了。

今設在曲線 l 上(圖3)已定義了一個連續函數 $f(z)$，我們要定義

$f(z)$在曲線(線路) l 上的路積分。取分點 $M_0, M_1, \cdots, M_n$, 把 l 分成許多小弧，這時 l 的起點 $A=M_0$, 終點 $B=M_n$。設分點 M_k 的複坐標爲 z_k, 這裏爲對稱起見用 z_0 記曲線的起點 A 的坐標，z_n 記曲線的終點 B 的坐標。又設 ζ_k 爲弧 $M_{k-1}M_k$ 上任意一點。作和

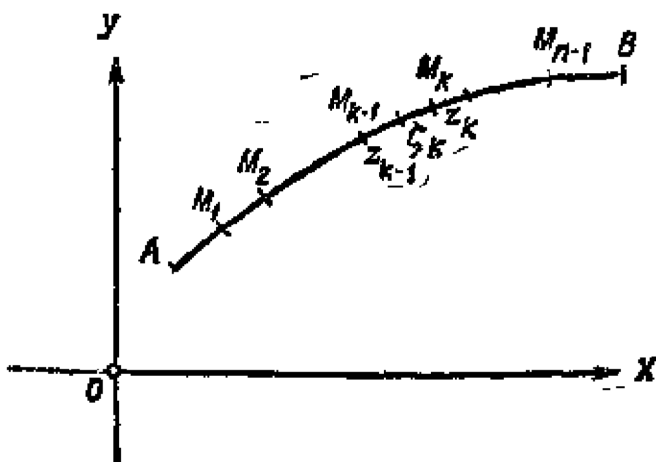


圖 8

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})。$$

當分點的數目 n 無限地增大，又每一小弧 $M_{k-1}M_k$ 都無限地縮短時，上式的極限就稱爲函數 $f(z)$ 沿着路線 l 的路積分：

$$(15)\qquad \int_l f(z)dz=\lim \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})。$$

記作 $z_k=x_k+iy_k$, $\zeta_k=\xi_k+i\eta_k$, 又把 $f(z)$ 分開做實數部份和虛數部份，即得：

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)][(x_k-x_{k-1})+ +i(y_k-y_{k-1})]$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)(x_k-x_{k-1})-v(\xi_k,\eta_k)(y_k-y_{k-1})]+$$

$$+i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)(x_k-x_{k-1})+u(\xi_k,\eta_k)(y_k-y_{k-1})]。$$

由 $f(z)$ 的連續性及關於 l 所作的假定，可知右邊兩個和都有極限，即對應的 l 上的線積分。因此我們就可將(15)式的積分表示爲普通實的線積分之和：

(16) $$\int_l f(z)\,dz=\int_l u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_l v(x,y)dx+u(x,y)dy.$$

以上在定義積分時,假設曲線 l 有端點。但顯而易見,這樣的定義對於閉線路也能適用。

路積分(15)的性質和普通實的線積分的性質完全一樣[II, 66]。舉其要者,如常數因子可以拿出積分符號之外;若干項之和的積分等於各項的積分的和;如果把路積分的方向反轉,積分的值祇變符號;如果把積分所在的路線分做幾部份,則在各部份路線上的積分的和恰等於原來路線上的積分。

現在再證明一個重要的不等式,他給積分(15)一個估計。設在線路 l 上被積函數的模不大於正數 M, 即

(17) $$|f(z)|\leqslant M, \qquad (z \text{ 在 } l \text{ 上})$$

又設 s 爲線路 l 的長。則對積分(15)有如下的估計:

(18) $$\left|\int_l f(z)\,dz\right|\leqslant Ms.$$

要證明這個,祇須看(15)式右邊的和,他的極限就是上式左邊的積分。因爲若干項之和的模不大於各項的模的和,故有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\,|z_k-z_{k-1}|$$

或由(17)有:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})\right|\leqslant M\sum_{k=1}^{n}|z_k-z_{k-1}|.$$

上式右邊的和表示線路 l 的一條內接折線之長。所以將兩邊取極限就得到(18)的不等式了。

對積分(15)還可以有更好的估計,即若以 ds 表示曲線 l 上弧的微分,則有:

(19) $$\left|\int_l f(z)dz\right|\leqslant\int_l |f(z)|\,ds.$$

這不等式也很容易得到，祇要在積分符號之內把 $f(z)$ 改爲 $|f(z)|$，$dz=dx+idy$ 改爲 $|dz|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=ds$ 就成了。

5. 勾犀定理　現在有一個重要的問題要問：在什麼條件之下路積分(16)的數值和積分路線無關？爲此，(16)式右邊兩線積分的數值和積分路線無關顯然是充分而且必要的。應用[II, 71]中已經得到的線積分和路線無關的條件，有：

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x};\quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},$$

而這剛好就是勾犀黎曼方程。因此知道路積分(16)和積分路線無關的條件就是函數 $f(z)$ 爲正則的條件。這是複變數函數的積分學中最基本的一件事實。

注意在導出線積分和路線無關的條件時，我們曾用過下面的公式[II, 69]：

$$\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_B\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy。$$

在證明這公式時，不但須假設 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 爲連續，並且還要假設在等式右邊二重積分符號內出現的兩個偏導數亦爲連續。這在我們的場合當然不成問題，因爲對正則函數 $f(z)$，$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都有連續的一階偏導數。以後還要用到沿一區域 B 的境界線的積分。這事當 $f(z)$ 在閉區域 B 中爲正則時是可能的。所謂 $f(z)$ 在閉區域 B 中爲正則，我們是這樣了解：即函數 $f(z)$ 在一個較大的區域中是正則，這區域不但包含 B，而且也包含 B 的境界線。

要更詳細地研究我們的問題，必須要看 $f(z)$ 爲正則的區域到底是個什麼樣的區域，——和研究實的線積分時一樣[II, 72]，這依然還是一個主要因素——就是說，這區域是單通區還是複通區？現在列舉幾個有關的基本定義及一些和實的線積分完全相似的結果。

z 平面上一有界區域的境界只是一條閉曲線時(換句話說,這區域中沒有孔),稱爲單通區域。設 $f(z)$是這種區域中的正則函數,z_0 爲其中任意一點,則積分

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z')dz' \tag{20}$$

和積分路線無關,且爲上限 z 的單値函數。上式右邊 z' 表示積分變數,他沿着區域中任意曲線從 z_0 變到 z。這時沿區域內任一閉線路的積分當然等於零。若 $f(z)$在閉區域中也是正則的,那末就可以沿區域的境界線求積分,結果也等於零。

今設區域 B 爲複通區,以一條外圈閉曲線和幾條內圈閉曲線爲境界。爲明瞭起見,假設 B 祇有一條內圈境界線[雙通區域(圖 4)]。在 B 中引一割線 λ 連接內外境界線。這樣所得到的區域 B' 仍爲單通區,而(20)式就表示 z 在 B' 中的單値函數。若 $f(z)$在閉區域中仍爲正則,我們就可以沿着 B' 的邊界做他的積分,由前可知積分數値爲零。這時,如圖所示,沿外境界線的積分是逆時針方向,沿內境界線的積分是順時針方向,而沿割線 λ 的積分有兩回,方向恰恰相反。因此沿 λ 的積分來回相消,從而:

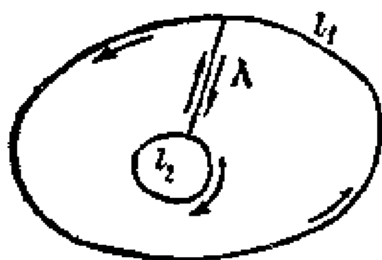


圖 4

$$\int_{\circlearrowleft l_1} f(z)dz+\int_{\circlearrowright l_2} f(z)dz=0 \tag{21}$$

其中 l_1 是外境界線,l_2 是內境界線,箭頭表示積分的方向。由圖易知沿兩境界線的積分方向可以用同一個條件來表示,卽當人在境界線上沿着積分的方向前進時,區域常在他的左邊。這種方向稱爲對於區域 B 的正方向。(21)式告訴我們,對複通區域,正則函數沿着他的境界的積分也等於零,祇要對於這區域積分處處是沿着正方向。

若改變(21)式沿內境界線的積分方向，卽得：

$$\int_{Cl_1} f(z)\,dz = \int_{Cl_2} f(z)\,dz \tag{22}$$

就是說，沿外圈境界線的積分等於沿內圈積界線諸積分之和（這裏祇有一個），如果規定沿任一境界線的積分都是逆時針方向的話。

上面這些就是函數論中最基本的定理，通常所謂勾犀定理。現在再總括爲三個形式略有不同的定理。

勾犀定理 I. 閉單通區域中的正則函數沿這區域的境界線的積分等於零。

勾犀定理 II. 閉複通區域中的正則函數沿着區域的境界線的積分也等於零，祇要積分的方向對於這區域處處是正方向。

勾犀定理 III. 若規定沿任一閉線路的積分必爲逆時針方向，則在閉複通區域中爲正則的函數沿着區域的外境界線的積分等於他沿內境界線諸積分之和。

勾犀定理有一個在實用上很重要的推論。設二不同路線 l' 和 l'' 有相同的端點 A 及 B，又在函數 $f(z)$ 爲正則的區域中，l' 可不動端點連續變形爲 l''。則由勾犀定理易知 $f(z)$ 沿 l' 的積分等於他沿 l'' 的積分。換言之，當一線路在 $f(z)$ 爲正則的區域中不動端點地連續變形時，$f(z)$ 沿這線路的積分數值並不改變。這事實對閉線路的變形也成立，祇要在變形過程中線路常爲閉。

最後還有一點重要的注意。就是在證明勾犀定理時，我們不但用到導數 $f'(z)$ 的存在性，並且還用到他的連續性。後者包含在 $f(z)$ 爲正則這一假設中。我們也可以用另外方法證明勾犀定理，祇用到 $f'(z)$ 的存在性，而不必用到他的連續性。但以後可以看到用勾犀定理可證 $f(z)$ 有任何階的導數，因之 $f'(z)$ 的連續性也可以得到了。

因此勾犀定理的第二種證明在理論上含有很重要的意義：他不利用 $f'(z)$ 的連續性，但是作爲這個定理的推論，由 $f'(z)$ 的存在性卻可以推出其爲連續。我們這裏不講這個證明。

以後如無特別聲明，我們常假設沿一閉線路積分時，總是逆時針方向的。

6．積分學的基本公式　設 $f(z)$ 在某一區域中爲正則，現在來看(20)式所定義的函數 $F(z)$。當區域爲複通區時，祇要在其中畫幾條割線以後，$F(z)$ 仍可視爲單值。和實變數函數的積分學裏面一樣[I，96]，我們可以證明 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的原函數，卽 $F'(z)=f(z)$。

要證明這事，首先注意由積分是和的極限這定義可知：

$$\int_l dz=\beta-\alpha,$$

其中 α 和 β 是線路 l 的起點和終點的複坐標。又易見：

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_z^{z+\Delta z} f(z')dz',$$

這裏積分路線可以取連接 z 和 $z+\Delta z$ 的直線段。我們可寫：

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_z^{z+\Delta z}[f(z')-f(z)+f(z)]dz'=$$

$$=f(z)\int_z^{z+\Delta z}dz'+\int_z^{z+\Delta z}[f(z')-f(z)]dz',$$

右邊第一項 $f(z)$ 被拿出積分符號之外，因爲他裏面並不含積分變數 z'。上式又可改寫爲：

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)+\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}[f(z')-f(z)]dz'。\tag{23}$$

剩下祇要證明當 $\Delta z\to 0$ 時，右邊第二項也趨向零。應用[4](18)式關於積分的估計，並且記着我們這裏積分路線的長是 $|\Delta z|$，可知：

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(z')-f(z)]\,dz'\right|\leqslant\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\max|f(z')-f(z)|\cdot|\Delta z|=$$

$$=\max|f(z')-f(z)|。$$

當 z' 在連接 z 和 $z+\Delta z$ 的閉直線段上變動時，我們要取 $|f(z')-$ $-f(z)|$ 的極大值。因爲 $|f(z')-f(z)|$ 是 z' 的連續非負函數，所以必定在閉直線段上某點 $z'=z'_0$ 取最大值，卽 $\max|f(z')-f(z)|=|f(z'_0)-$ $-f(z)|$。但當 $\Delta z\to 0$ 時，閉直線段上的點 z'_0 當然也趨向 z，故由 $f(z)$ 的連續性知 $f(z'_0)-f(z)\to 0$。因此(23)式右邊第二項也趨向零，卽 $F'(z)=f(z)$。

現在再證明若 $f(z)$ 有兩個原函數 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$，則他們衹相差一個常數項。由假設有：

$$F'_1(z)=f(z),\quad F'_2(z)=f(z),$$

卽
$$[F_1(z)-F_2(z)]'=0。$$

因此我們只要證明：若在區域 B 中一函數的導數恆等於零，這函數在 B 中就是常數。爲此，設

$$f_1(z)=u_1(x,y)+iv_1(x,y),\ \text{又}\ f'_1(z)\equiv 0。$$

由[2] $f'_1(z)$ 的兩種表示有：

$$f'_1(z)=\frac{\partial u_1}{\partial x}+i\frac{\partial v_1}{\partial x}=\frac{\partial v_1}{\partial y}-i\frac{\partial u_1}{\partial y}=0,$$

因之
$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\equiv 0;\quad\frac{\partial u_1}{\partial y}\equiv 0;\quad\frac{\partial v_1}{\partial x}\equiv 0;\quad\frac{\partial v_1}{\partial y}\equiv 0,$$

所以 u_1, v_1 都和 x, y 無關，卽他們都是常數，自然 $f_1(z)$ 也是常數了。

今設已知 $f(z)$ 的一個原函數是 $F_1(z)$，他和原函數(20)祇差一常數項，卽

$$\int_{z_0}^{z}f(z')dz'=F_1(z)+C。$$

要決定常數項 C，可設積分路線的終點 z 與起點 z_0 重合，這樣就有：

$$0=F_1(z_0)+C \quad 或 \quad C=-F_1(z_0),$$

而前式就可改寫為：

$$\int_{z_0}^{z} f(z')dz'=F_1(z)-F_1(z_0), \tag{24}$$

即路積分的數值等於原函數沿積分路線的改變量。這時當然須假設原函數 $F(z)$ 為單值，並且在某一包含積分路線的區域中為正則。

例。試看積分

$$\int_l (z-a)^n dz, \tag{25}$$

其中 n 是一個整數，l 是閉線路。若 $n\neq -1$，則原函數為：

$$\frac{1}{n+1}(z-a)^{n+1}。 \tag{26}$$

當 $n\geqslant 0$ 時，這是一個全平面的單值正則函數；當 $n<-1$ 時，是全平面除 $z=a$ 點以外的單值正則函數。假設線路 l 不經過 $z=a$ 點。單值函數(26)沿閉線路 l 走一周所得的改變量顯然等於零，因此當 $n\neq -1$ 時，積分(25)沿任一閉線路的數值都等於零。這事實當 $n\geqslant 0$ 時由勾犀定理立刻可得到；當 $n<-1$ 時，若 $z=a$ 點不在 l 所包圍的區域之內，也可由勾犀定理立刻得到。而前面的論斷告訴我們，當 $n<-1$ 時，卽使 $z=a$ 點在 l 所包圍的區域內，積分(25)的數值還是等於零。這時積分符號內的函數在 $z=a$ 點並非正則，因為在這一點他的數值成為無窮大。

現在再看 $n=-1$ 的情形，卽

$$\int \frac{dz}{z-a}。 \tag{27}$$

若 a 點在閉線路 l 之外，由勾犀定理知道積分之值為零。今設 a

點在l之內(圖5)。以a做中心畫一個半徑爲ρ的小圓C，使他全部在l之內。則被積函數$(z-a)^{-1}$在l和C所包圍的閉環域中爲正則。由勾犀定理，可以沿圓周C來求積分(27)的數值。在C上

$$z-a=\rho e^{i\varphi},$$

φ在區間$(0, 2\pi)$中變動。因此

$$dz=i\rho e^{i\varphi}d\varphi。$$

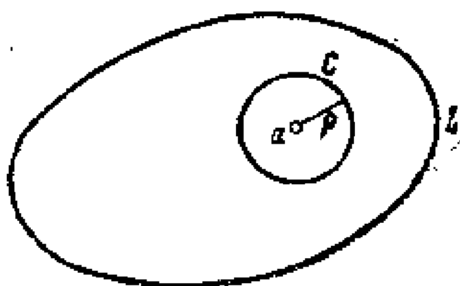


圖 5

代入積分(27)，有：

$$\int_C \frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi}d\varphi}{\rho e^{i\varphi}}=2\pi i。$$

由[5](22)式卽得：

$$\int_l \frac{dz}{z-a}=2\pi i。\tag{28}$$

7. 勾犀公式　設函數$f(z)$在閉區域B中爲正則。爲簡單起見，設B爲單通區域。又設B的境界線爲l，a爲B中一點。

現在做一個新的函數

$$\frac{f(z)}{z-a}。\tag{29}$$

這函數在B中也是處處正則，可能除$z=a$點以外，因爲在這點(29)中的分母等於零。用一個以a爲中心，半徑等於ε的小圓把這點除外，設這圓的圓周爲C_ε。函數(29)在l和C_ε所包圍的閉環域中爲正則，故由勾犀定理有：

$$\int_l \frac{f(z)}{z-a}dz=\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz。$$

在上式右邊積分中令$f(z)=f(a)+f(z)-f(a)$，則

$$\int_l \frac{f(z)}{z-a}dz=f(a)\int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z-a}+\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz,$$

或由(28)有：

$$(30)\qquad \int_l \frac{f(z)}{z-a}dz=f(a)\cdot 2\pi i+\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz。$$

現在注意下面的事實：(30)式左邊的積分以及右邊第一項都和 ε 無關，因此右邊第二項的積分也應該和 ε 無關。但我們後面又可以證明當 $\varepsilon\to 0$ 時這積分也趨向零，所以他必定恆等於零無疑。

應用[4](18)式的估計，並且注意當 z 在 C_ε 上變動時 $|z-a|=\varepsilon$，即得：

$$\left|\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right|\leqslant\frac{\max\limits_{z\text{在}C_\varepsilon\text{上}}|f(z)-f(a)|}{\varepsilon}2\pi\varepsilon=\max_{z\text{在}C_\varepsilon\text{上}}|f(z)-f(a)|\cdot 2\pi。$$

當 $\varepsilon\to 0$ 時 C_ε 上的點 z 趨向 a，所以 $\max|f(z)-f(a)|$ 也趨向零。因此(30)式第二項和 ε 一齊趨向零，故必恆等於零。(30)式於是就可以改寫爲：

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{f(z)}{z-a}dz。$$

將上式中 z 改寫爲 z'，a 改寫爲 z，得：

$$(31)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{f(z')}{z'-z}dz'。$$

這就是勾犀公式。他用正則函數在區域的境界線上的數值來表示這函數在區域中任意一點 z 的數值。值得注意的是：z 在勾犀公式的積分符號內以參變數的姿態出現，而同時又是在這樣異常簡單的形式之下。

因爲 z 是區域的內點，而積分變數 z' 則在區域的境界線上變動，所以 $z'-z\neq 0$，勾犀公式中的被積函數是個連續函數，故可關於參變數 z 在積分符號之內微分任何多次。易證：

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{f(z')}{(z'-z)^2}dz';\quad f''(z)=\frac{2!}{2\pi i}\int_l\frac{f(z')}{(z'-z)^3}dz',$$

一般，對任一正整數 n 有：

(32) $$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}}dz'。$$

因此知道正則函數有任何階的導數，並且他們的數值都可藉(32)式用這函數在區域境界上的數值來表示。

為了確定 $f'(z)$，在積分符號內關於 z 求微分的可能性可嚴格證明如下。由勾犀公式有：

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{z'-z-\Delta z}dz'-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{z'-z}dz'=$$

$$=\frac{\Delta z}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)(z'-z-\Delta z)}dz'$$

或
$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)(z'-z-\Delta z)}dz'。$$

如果在上式右邊當 $\Delta z\to 0$ 時可以把極限取到積分符號裏面去，則有：

(32_1) $$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^2}dz',$$

亦即我們所需要的結果了。因此現在祇要證明當 $\Delta z\to 0$ 時

$$\delta=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^2}dz'-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)(z'-z-\Delta z)}dz'$$

也趨向零。

由簡單的計算可知

$$\delta=\frac{-\Delta z}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^2[z'-(z+\Delta z)]}dz'。$$

函數 $f(z')$ 在 l 上為連續，所以他的模在 l 上為有界，即 $|f(z')|<M$。記 z 和 l 的最短距離為 $2d$，則有 $|z'-z|\geqslant 2d$。當 $\Delta z\to 0$ 時 $z+\Delta z\to z$，故可使 $|z'-(z+\Delta z)|>d$。仿前面當做的估計有：

$$|\delta|<\frac{|\Delta z|}{2\pi}\cdot\frac{M\cdot s}{4d^3},$$

其中 s 表示 l 的長。由這估計易見當 $\Delta z\to 0$ 時 $\delta\to 0$。從 (32_1) 出發，用完全一樣的辦法可證 $f'(z)$ 也有導數

$$f''(z)=\frac{2!}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^3}dz',$$

於是證完。

和勾犀定理一樣，公式(31)和(32)對複通區域也成立，祇要積分路

線包括區域 B 的全部境界線，並且處處對於 B 爲正方向，就是說，區域總在左邊。

現在再看區域爲無界時勾犀公式是怎樣。設 $f(z)$ 在閉線路 l 的外域 B 中爲正則，並且滿足一個附加條件，即當 z 無限遠移時 $f(z)$ 趨向零：

$$f(z)\to 0 \quad 當 \quad z\to\infty。\tag{33}$$

這時可證勾犀公式仍成立：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Cl}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'\tag{34}$$

上式積分須對區域 B 爲正方向。要證明(34)式，可以原點做中心，畫半徑爲 R 的很大的圓，使 l 全部包含在這圓之內。函數 $f(z)$ 在 l 和圓周 C_R 間的環域中爲正則(圖 6)，故對環域中任意一點 z 有：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Cl}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'+\frac{1}{2\pi i}\int_{\circ C_R}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'。\tag{35}$$

和證明勾犀公式一樣，我們可以肯定上式右邊第二項和 R 無關。

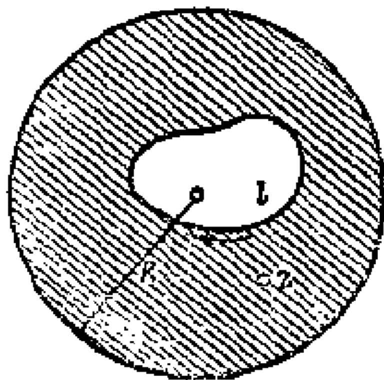


圖 6

因此如果能證明當 R 無限增大時他的數值趨向零，則必恆等於零，而(35)式也就變成(34)式了。現在就來估計(35)式右邊第二項。對被積函數的分母的模 $|z'-z|$，我們用較小的數值 $|z'|-|z|=R-|z|$ 來替代，即得：

$$\left|\int_{C_R}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'\right|\leqslant\max_{z'\text{在}C_R\text{上}}|f(z')|\frac{2\pi R}{R-|z|}$$

或
$$\left|\int_{C_R}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'\right|\leqslant\max_{z'\text{在}C_R\text{上}}|f(z')|\frac{2\pi}{1-\frac{|z|}{R}}。$$

當 R 無限增大時上式右邊的分數趨向 2π，而由條件(33) $\max\limits_{z' \text{在} C_R \text{上}} |f(z')|$ 趨向零。這樣，對無界區域的勾犀公式也就得以證明了。注意：在證明中我們可以看出，對 z 來講，條件(33)必須一致地滿足纔行，即對任一 $\varepsilon>0$ 存在 R_ε，使當 $|z|>R_\varepsilon$ 時 $|f(z)|<\varepsilon$。

有時我們會遇到一種函數，他在一區域中爲正則，函當變數趨近於境界線時他也有一定的極限值，使之成爲閉區域中的連續函數，但他卻不一定在閉區域中爲正則，就是說他不一定在一個比原區域更大些的區域中爲正則。要注意，對於這種在區域中爲正則，而在閉區域中爲連續的函數，勾犀定理和勾犀公式都一樣成立。實際上，如果把區域的境界線略略縮小一些，函數就在這縮小的閉區域中爲正則。這時，如勾犀定理，當然可以應用，因此函數沿境界線的積分就等於零。我們再把這縮小的境界線連續地漸漸擴大，直至和原區域的境界線重合爲止。函數沿原區域的境界線的積分，作爲他在縮小的境界線上的積分的極限，也必等於零。我們可以這樣取極限乃是因爲函數在閉區域中爲一致連續的緣故。

可以說從此以後，這一章裏面的結果幾乎全部都是勾犀公式的推論，這公式我們還有許多次要提到他。在這一節裏先舉兩個應用的例子。

當 $f(z)$ 在以原點爲中心，半徑等於 R 的圓 $|z|<R$ 中爲正則，而在閉圓 $|z|\leqslant R$ 中爲連續時勾犀定理也成立的事，可以詳細證明如下：設 R_1 是小於 R 的正數，則 $f(z)$ 在閉圓 $|z|\leqslant R_1$ 中爲正則，應用勾犀定理有：

$$\int_{|z|=R_1} f(z)dz=0。$$

在這圓周上，$z=R_1e^{i\varphi}$，$dz=R_1ie^{i\varphi}d\varphi$，代入上式得：

$$iR_1\int_0^{2\pi} f(R_1e^{i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi=0。$$

因爲 $f(z)$ 在閉圓 $|z|\leqslant R$ 中爲一致連續[1]，可證當 $R_1\to R$ 時上式的極限可以取到積分符號裏面去[II, 84]，因之有：

$$iR\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi=0,$$

或將變數仍改爲 z，即得：

$$\int_{|z|=R} f(z)dz=0。$$

當境界線的形狀比較複雜時，證明也比較困難些。對於上述這種在區域中爲正則而在閉區域中爲連續的函數，如前一樣可由勾犀定理導出勾犀公式。

例 I 取指數函數 $f(z)=e^z$，l 爲任一閉線路，z 爲 l 之內任意一點。因 e^z 在全平面上爲正則，所以可用(32)而得：

$$e^z=\frac{n!}{2\pi i}\int_l \frac{e^{z'}}{(z'-z)^{n+1}}dz'。$$

如果取 l 爲一圓，以 z 做中心，半徑固定爲 ρ，則有：

$$z'-z=\rho e^{i\varphi};\quad e^{z'}=e^z e^{\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi};\quad dz'=i\rho e^{i\varphi}d\varphi;$$

代入上式，得：

$$1=\frac{n!}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} e^{\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi-in\varphi}d\varphi,$$

因此

$$2\pi\frac{\rho^n}{n!}=\int_0^{2\pi}e^{\rho\cos\varphi+i(\rho\sin\varphi-n\varphi)}d\varphi。$$

取實數部份，就得到一個相當複雜的定積分公式：

(36) $$\int_0^{2\pi} e^{\rho\cos\varphi}\cos(\rho\sin\varphi-n\varphi)d\varphi=2\pi\frac{\rho^n}{n!}。$$

例 II 取有理分式

(37) $$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

這裏多項式 $\psi(z)$ 的次數高於多項式 $\varphi(z)$ 的次數。$f(z)$ 顯然滿足(33)。又設 l 爲閉曲線，所有 $\psi(z)$ 的零點都含在 l 的內域中。則 $f(z)$ 在 l 的外域 B 中爲正則，故可應用勾犀公式。這時沿 l 積分的方向須是順時針才是對於 B 爲正方向。若將積分方向變爲逆時針，積分的值要變更符號。故有：

(38) $$-\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{\varphi(z')}{\psi(z')(z'-z)}dz'。$$

上式右邊被積函數在 l 的內部不再是正則，因爲凡是使 $\psi(z')$ 爲零的點都是他在這裏面的奇異點。z 點在 l 的外部（在無界區域 B 內），故不是他的奇異點。由於上述奇異點的存在，即 $\psi(z')$ 的零點的存在，所以(38)式的積分才不等於零。

8. 勾犀型積分 在勾犀公式(31)中，被積函數的分子表示正則函數 $f(z)$ 在境界線 l 上的數值。而由此公式可知積分的值恰巧表示 $f(z)$ 在區域中某點的數值。現在我們把這積分當做一種運算工具，而假定

被積函數的分子是一個完全任意的在閉線路 l 上爲連續的函數，又假定 z 是 l 內部一點，看由這積分可以得到些什麽。以 $\omega(z')$ 記這連續函數，關於他，除了在 l 上爲連續以外，其餘我們一無所知，這時積分的值顯然是 z 的函數：

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\omega(z')}{z'-z}\,dz'。\tag{39}$$

當 $\omega(z')$ 在前面的假設之下，上式右邊的積分稱爲勾犀型積分。和前節一樣，我們可以在積分符號之內關於 z 微分任意次，而得和(32)相類的公式：

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_l \frac{\omega(z')}{(z'-z)^{n+1}}\,dz'。\tag{40}$$

所以不論 $\omega(z')$ 怎樣，$F(z)$ 總是閉線路 l 的內域 B 中的正則函數。當然，我們也可以假設 z 是 l 的外部的點，這時由(39)依舊可以得到(40)，故對 l 外部的點 z，(39)式也定義一個 z 的正則函數。唯當 z 在 l 之上時，(39)式的積分卻失了意義，因這時被積分函數在 l 上有不連續點之故。由上所述，可得下之結論：勾犀型積分定義兩個正則函數，一在 l 的外部，一在 l 的內部。

注意：一般這兩個正則函數並不相同。要說明這點，祇要看最簡單的情形，就是當積分的"密度" $\omega(z')$ 和在 l 所包圍的閉區域 B 中的正則函數 $f(z)$ 在 l 上的值全同時。這時可設 $\omega(z')=f(z')$ 是在整個閉區域 B 之中的正則函數。若 z 在 l 的內部，則由(31)可知勾犀型積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{z'-z}\,dz'\tag{41}$$

在 l 的內部給出函數 $f(z)$。但如 z 在 l 的外部，則因上式中被積函數的分子 $f(z')$ 在閉區域 B 中爲正則，分母 $z'-z$ 在 B 中也不等於零，由勾犀定理可知，若 z 在 l 之外，則積分(41)等於零。所以(41)式在 l 的內

部定義的函數等於 $f(z)$，而在其外部定義零函數。

再回到勾犀公式(31)。在這公式中，積分的"密度" $f(z')$ 與函數 $f(z)$ 在 l 上的值全同。但對一般勾犀型積分，祇知 $\omega(z')$ 在 l 上爲連續時，他在 l 的內部所定義的正則函數在 l 上的性質就不得而知了。換言之，假定(39)式在 l 內部定義函數 $f_1(z)$，在其外部定義函數 $f_2(z)$，且設 z 從 l 內部趨向 l 上一點 z'，要問 $f_1(z)$ 是否趨向一定的極限值？如果有極限值，他和 $\omega(z')$ 的關係又是怎樣？當 z 從 l 的外部趨向極限點 z' 時，對 $f_2(z)$ 當然也發生同樣的問題。這些問題我們現在不想去研究他。但是要曉得只須加上若干條件以後，極限值 $f_1(z')$ 和 $f_2(z')$ 就會存在，唯其與 $\omega(z')$ 的關係卻是相當複雜的。當 z 沿着 l 的法線趨向 z' 時，$f_1(z)$ 的極限值和 $f_2(z)$ 的極限值之差恰好等於 $\omega(z')$。這一點可由前段所舉的例子看出來。這時 $f_1(z)=f(z)$，在 l 之內，$f_2(z)=0$ 在 l 之外，故對 l 上任一點 z'，內極限值是 $f(z')$，而外極限值是零。

在研究函數的解析表示時，常要用到勾犀型積分。但要注意，這種表示並不是唯一的，卽同一函數可以用不同的勾犀型積分表示。舉一個例來看。設 l 爲閉線路，原點 $z=0$ 含在 l 的內域中。在這內域中定義一個恆等於零的正則函數，卽零函數。這函數顯然可以用"密度" $\omega(z')=0$ 的勾犀型積分來表示。現在我們證明他也可以用"密度" $\omega(z')=\frac{1}{z'}$ 的勾犀型積分表示。爲此，祇須證明積分

$$(42)\qquad F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{1}{z'(z'-z)}\,dz'$$

在 l 內部任一點 z 的數值都等於零就好了。這裏要記住，依照條件，原點也在 l 內部。上式被積函數可分解爲最簡部分分式：

$$\frac{1}{z'(z'-z)}=-\frac{1}{zz'}+\frac{1}{z(z'-z)}。$$

因此 $$F(z)=-\frac{1}{2\pi iz}\int_l\frac{dz'}{z'}+\frac{1}{2\pi iz}\int_l\frac{dz'}{z'-z}。$$

由[6](28)式,及假設原點也在 l 的內部,有:

$$F(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}=0。$$

所以勾犀型積分(42)在 l 內部也定義零函數。把這積分加在一般的勾犀型積分(39)一起,得到另一勾犀型積分,他和(39)式的積分在 l 的內域中定義同一函數 $F(z)$。因此可知若兩勾犀型積分相等:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{\omega_1(z')}{z'-z}dz'=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{\omega_2(z')}{z'-z}dz' \tag{43}$$

對於 l 內部所有的點 z,他們的"密度" $\omega_1(z')$ 和 $\omega_2(z')$ 卻不一定相等。但如對"密度"加上旁的條件以後,這事就可能了。例如下面的哈爾諾克定理就是其一:若 $\omega_1(z')$ 和 $\omega_2(z')$ 是連續實函數,l 爲圓周,則(43)式和 $\omega_1(z')\equiv\omega_2(z')$ 相抵。

9. 勾犀公式的推論　設函數 $f(z)$ 在閉區域 B 中爲正則,或在閉區域 B 中爲連續,而在 B 的內部爲正則。又設 B 的境界線爲 l。現在看正則函數 $[f(z)]^n$,這裏 n 是任一正整數。由勾犀公式有:

$$[f(z)]^n=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{[f(z')]^n}{z'-z}dz'。$$

設 M 是模 $|f(z')|$ 在 l 上的極大值,δ 是模 $|z'-z|$ 的極小值,即 z 到境界線 l 的最短距離。

由常用的估計,有: $$|f(z)|^n\leqslant\frac{M^nS}{2\pi\delta},$$

其中 S 是 l 的長。上之不等式可改寫爲:

$$|f(z)|\leqslant M\left(\frac{S}{2\pi\delta}\right)^{\frac{1}{n}}。$$

當 n 無限增大時將這不等式取極限,得:

$$|f(z)|\leqslant M \tag{44}$$

故知：若函數 $f(z)$ 在一區域中爲正則，在閉區域中爲連續，則模 $|f(z)|$ 必在境界線上取極大値，即 $|f(z)|$ 在區域內部任一點的値決不大於他在境界線上的極大値。

可以證明祇當 $f(z)$ 爲常數時(44)式中等號成立。上述性質通常稱爲模數原理。

再看勾犀公式的另一推論。函數 e^z 或 z 的多項式是全平面正則函數的例子。現在證明這種全平面正則函數的模決非有界，除了常數以外。換句話說，下面的定理成立，這定理通常稱爲利烏微爾定理：若 $f(z)$ 爲全平面正則的有界函數，即存在正數 N，使對所有的 z

$$|f(z)| \leqslant N, \tag{45}$$

則 $f(z)$ 必爲常數。

對 $f'(z)$ 用勾犀公式：

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{(z'-z)^2}dz'。$$

因 $f(z)$ 爲全平面正則，l 可爲任意包含 z 在其內域的閉曲線。取 l 爲以 z 做中心，R 做半徑的圓周，R 以後要無限增大。易見：

$$|z'-z|=R$$

所以
$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\frac{\max\limits_{z'\text{在}l\text{上}}|f(z')|}{R^2}\,2\pi R。$$

由(45)式有：
$$|f'(z)| \leqslant \frac{N}{R}。$$

這不等式左邊和 R 無關，而右邊當 R 無限增大時極限爲零，故必 $f'(z)=0$，由[6]知 $f(z)$ 是常數。

以 $\cos z$ 爲例。由[1](1)式可知當 z 沿虛軸趨向無窮大時，$|\cos z|$ 也無限增大。實際上，設 $z=iy$，則有：

$$\cos z = \cos iy = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2}。$$

10. 孤立奇異點　最後，我們再看勾犀公式的第三個推論，即正則函數的奇異點的研究。設 $f(z)$ 在 $z=a$ 的鄰域中爲單值正則函數，但在 $z=a$ 這點卻不然。這種奇異點通常稱爲孤立奇異點。例如 $z=0$ 就是函數

$$f(z)=\frac{1}{z}$$

的孤立奇異點。現在來研究孤立奇異點的可能類型。

我們可以想到下面三種可能性：(1)對所有 a 點鄰近的 z，$|f(z)|$ 爲有界；(2)當 $z\to a$ 時 $|f(z)|\to\infty$；(3)對 a 點鄰近的 z，$|f(z)|$ 非爲有界，但當 $z\to a$ 時 $|f(z)|\nrightarrow\infty$，而爲振動。

先證明在第一種情形 $z=a$ 不是 $f(z)$ 的奇異點。換句話說，若 $f(z)$ 在 $z=a$ 的鄰域中爲單值正則，並且在這鄰域中 $|f(z)|$ 爲有界，則 $f(z)$ 在 $z=a$ 也是正則。實際上，以 a 做中心，畫兩個半徑爲 ρ 及 R 的圓 C_ρ 和 C_R，其中 $\rho<R$。若 z 處於這兩圓之間的環域中，則由勾犀公式有：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{OC_R}\frac{f(z')}{z'-z}dz'+\frac{1}{2\pi i}\int_{OC_\rho}\frac{f(z')}{z'-z}dz'。$$

今證等式右邊第二項當 $\rho\to 0$ 時也趨向零。因此，和證明勾犀公式時一樣，可知此項必恆等於零。由假設 $f(z)$ 的模在 $z=a$ 的鄰域中爲有界，所以 $|f(z)|\leqslant N$，這裏 N 是一個正數。

在圓周 C_ρ 上 $|z'-a|=\rho$，於是有：

$$|z'-z|=|(z'-a)-(z-a)|\geqslant|z-a|-|z'-a|=|z-a|-\rho。$$

所以對第二個積分可作如下的估計：

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(z')}{z'-z}dz'\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{N}{|z-a|-\rho}\cdot 2\pi\rho=\frac{N\rho}{|z-a|-\rho};$$

由此易見不等式右邊和 ρ 一齊趨向零，因之左邊亦然。這樣就有：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz',$$

卽對所有和 a 鄰近的點 z，$f(z)$ 常可用勾犀型積分表示，因此 $f(z)$ 本身也就表示一個處處正則的函數，連 $z=a$ 也在內。更準確些說，若 $f(z)$ 在 $z=a$ 的鄰近為單值正則，又 $|f(z)|$ 有界，則當 $z\to a$ 時 $f(z)$ 趨向一定的有限值為極限，若取這有限值為 $f(a)$，$f(z)$ 在 a 點就是正則了。

再看第二種和第三種可能性。函數 $\frac{1}{z-a}$ 是第二種可能性的一個例，這種奇異點通常稱為極點。就是說，若 $f(z)$ 在 $z=a$ 的鄰近為單值正則，又當 $z\to a$ 時 $|f(z)|\to\infty$，則 a 稱為 $f(z)$ 的極點。

關於第三類型的奇異點如 $z=0$ 這點對於函數

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}} \tag{46}$$

卽是一例。

實際上，當 z 沿正實軸趨向零時函數 (46) 趨向 $+\infty$，而當 z 沿負實軸趨向零時他卻趨向零。這類奇異點稱為本性奇異點，卽若函數 $f(z)$ 在 $z=a$ 的某一鄰域中為單值正則，但 $|f(z)|$ 非有界，又當 $z\to a$ 時 $|f(z)|\not\to\infty$，則 $z=a$ 稱為 $f(z)$ 的本性奇異點。

現在證明一個關於函數在本性奇異點鄰近的性質的定理。

定理。若 $z=a$ 為 $f(z)$ 的本性奇異點，則在以 a 為中心的任意小的圓中，函數值可任意接近於一已知複數。

我們要證明的就是下面這件事：設 γ 為任一已給複數，ε 為任一已給正數，則在以 a 為中心的任意小的圓中，必存在一點 z，使 $|f(z)-\gamma|<\varepsilon$。現在用反證法。假設定理不真，則存在複數 β，使某一以 a 為中心的圓 C 中所有的點 z 都滿足不等式 $|f(z)-\beta|\geqslant m$，這裏 m 是一個正數。今作函數

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-\beta}。$$

$\varphi(z)$在C中爲正則，又$|\varphi(z)|$有界：

$$|\varphi(z)|=\frac{1}{|f(z)-\beta|}\leqslant\frac{1}{m}。$$

由前已證明過的事實知$\varphi(z)$在$z=a$也是正則，並且當$z\to a$時$\varphi(z)$趨向有限極限值。因此對於函數

$$f(z)=\beta+\frac{1}{\varphi(z)},$$

當$z\to a$時，如果$\varphi(z)$的極限值不等於零，$f(z)$就應該也趨向一個有限極限值；假如$\varphi(z)$的極限值爲零，則$f(z)$應趨向無窮大。但由本性奇異點的定義，這兩種情形都不可能，定理也就得以證明。

我們還可以證明更準確的定理，即：

匹卡定理。若$z=a$爲$f(z)$的本性奇異點，則在以a爲中心的任意小的圓中，$f(z)$取任何複數值無數次之多，可能除了一個複數以外。

這定理的證明比上定理的證明複雜些，現在不準備講他。我們只驗證對於以$z=0$爲本性奇異點的函數(46)這定理成立。

取任一不等於零的複數α，作方程：

$$e^{\frac{1}{z}}=\alpha。\tag{46_1}$$

由複數的對數的性質，易知方程(46_1)的根是：

$$z=\frac{1}{\lg|\alpha|+i(\varphi+2k\pi)},$$

其中φ是α的幅角，含於$(0,\ 2\pi)$區間內，k爲任何整數。當k的絕對值無限增大時所得(46_1)的根就可任意接近於零。因此，函數(46)在以原點爲中心的任意小的圓中取任何複數值無數次之多，除了零值以外。易證函數$\sin\frac{1}{z}$在以原點爲中心的任意小的圓中取任何複數值

無數次之多而沒有例外。

極點和本性奇異點都是孤立奇異點，即在這種點的某一鄰域中函數爲正則。以後在研究多值函數的時候我們還要講到一種孤立奇異點，即支點。

11. 具複數項的無窮級數 已經說明了有關積分概念的主要各點，我們現在轉移視線於無窮級數。設有一具複數項的無窮級數

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)+\cdots+(a_n+ib_n)+\cdots \tag{47}$$

這級數稱爲收斂級數，假如最先 n 項之和

$$S_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+i(b_1+b_2+\cdots+b_n) \tag{48}$$

當 n 無限增大時趨向有限極限值。由這定義立刻可以知道當且僅當由(47)的實數部分和虛數部分所組成的具實數項的級數

$$a_1+a_2+\cdots,\quad 和\quad b_1+b_2+\cdots \tag{49}$$

同時爲收斂時，級數(47)始爲收斂。若 A 和 B 分別爲(49)兩級數的和，則易知部分和(48)趨向極限值 $A+iB$，而這也就是級數(47)的和。

現在再解釋級數(47)爲絕對收斂的意義。對級數(47)的每一項用他的模來替代，結果得到一個正項級數

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots \tag{50}$$

易證當上級數收斂時原級數(47)也收斂。事實上，由不等式

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geqslant|a_n|\ 或\ |b_n|$$

立刻可知[I, 120 和 124] 當級數(50)收斂時級數(49)就收斂（並且是絕對收斂），因之級數(47)也收斂。

級數(50)收斂時收斂級數(47)稱爲絕對收斂。這種絕對收斂級數與具實數項的絕對收斂級數有相類似的性質。

如我們剛纔所見，級數(47)絕對收斂時級數(49)也絕對收斂，並且他們的和與項的次序無關[I, 137]。因此級數(47)的和也與項的次序

無關。

應用和[I, 137]相類似的論斷,一樣可以證明絕對收斂級數的乘法定理。卽若有兩個具複數項的絕對收斂級數:

$$S=\alpha_1+\alpha_2+\cdots \quad 和 \quad T=\beta_1+\beta_2+\cdots,$$

則級數

$$\alpha_1\beta_1+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+(\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_1)+\cdots$$

也是絕對收斂,其和爲 ST。詳細證明我們不再說了。因爲對複變數勾犀判別極限存在的準則也成立,故與實變數的情形一樣[I, 125],由這準則可以得到具複數項的無窮級數收斂的充要條件,卽級數(47)收斂的充要條件是:對任一已給正數 ε 存在正整數 N, 使當 $n>N$ 時

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(a_k+ib_k)\right|<\varepsilon,$$

其中 p 是任意正整數。

現在再看變項級數,卽項中包含變數 z 的級數:

$$u_1(z)+u_2(z)+\cdots。 \tag{51}$$

如果對區域 B 中(或曲線 l 上)所有的點 z 這級數都收斂的話,則稱他在區域 B 中(或曲線 l 上)爲收斂。

和實變數的情形一樣[I, 143],我們又可以導入一致收斂的概念。級數(51)稱爲在區域 B 中(或曲線 l 上)一致收斂,若對任一已給正數 ε 存在一個正數 N, 使對區域 B 中(或 l 上)所有的點 z, 有:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(z)\right|<\varepsilon, \tag{52}$$

祇要 $n>N$, p 是任意正整數。

具複變數的一致收斂級數與具實變數的一致收斂級數有相同的性質[I, 146]。現在舉兩個最重要的性質,證明和實變數的情形完全一樣。

若級數(51)的每項都是z在區域B中(或曲線l上)的連續函數，並且級數在B中(l上)一致收斂，則級數的和也是連續函數。

若以連續函數爲項所成的級數(51)在曲線l上一致收斂，則級數可以沿這曲線逐項積分。

最後，斂一個級數(51)爲絕對且一致收斂的充分條件，還和在實變數的情形完全相似[I, 147]：若對區域B中(或曲線l上)所有的點z，級數(51)滿足條件：

$$|u_k(z)|\leqslant m_k \qquad (k=1,2,\cdots),$$

其中m_k爲正數，並且以m_k爲一般項的級數收斂，則級數(51)在區域B中(曲線l上)絕對且一致收斂。

還有一件事可由此立刻推出來的，卽若級數(51)在曲線l上一致收斂，$|v(z)|$在曲線l上爲有界(如連續函數)，以$v(z)$乘級數的每一項，則所得到的級數仍舊一致收斂。事實上，我們得到的是：

$$u_1(z)v(z)+u_2(z)v(z)+\cdots,$$

其中$|v(z)|<N$。由不等式(52)有：

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(z)v(z)\right|=|v(z)|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(z)\right|<N\varepsilon,$$

其中N是個固定正數，而當n甚大時ε可任意小，所以這級數也是一致收斂的。

已經說明了有關複無窮級數的許多基本概念以後，我們現在證明一個關於以正則函數爲項的級數的基本定理。

12. 維爾史特拉斯定理 設級數(51)中每一項都是以l爲境界線的閉區域B中的正則函數，又級數在l上一致收斂，則在整個閉區域B中級數也是一致收斂，其和在B的內部爲正則函數，又級數可以逐項微分任意多次。

以 z' 表示境界線 l 上的變動點。由假設，級數

$$u_1(z')+u_2(z')+\cdots \tag{53}$$

爲一致收斂，故得不等式：

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(z')\right|<\varepsilon \qquad (當\ n>N,\ p>0\ 爲任意正整數)。$$

上式左邊是有限個正則函數的和，所以仍舊是閉區域 B 中的正則函數。由模數原理，從這個不等式可以得到下面的不等式，對 B 中任意一點 z 都成立：

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(z)\right|<\varepsilon \qquad (當\ n>N,\ p>0\ 爲任意正整數)。$$

因此級數(51)在整個閉區域中爲一致收斂。

記級數(53)的和爲 $\varphi(z')$ (l 上的連續函數)。以

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z'-z} \qquad (z\ 是\ B\ 的內點)$$

乘級數的每一項，得

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z')}{z'-z}=\frac{1}{2\pi i}\frac{u_1(z')}{z'-z}+\frac{1}{2\pi i}\frac{u_2(z')}{z'-z}+\cdots$$

這級數在 l 上仍爲一致收斂，所以可沿 l 逐項積分得：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(z')}{z'-z}dz'=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{u_1(z')}{z'-z}dz'+\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{u_2(z')}{z'-z}dz'+\cdots$$

但 $u_k(z)$ 都是正則函數，由勾犀公式，上式可改寫爲

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(z')}{z'-z}dz'=u_1(z)+u_2(z)+\cdots$$

因此，級數(51)的和在 B 的內部可以用勾犀型積分表示，故爲正則函數。記这和爲 $\varphi(z)$：

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)=\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(z')}{z'-z}dz'。 \tag{54}$$

注意：由前已證級數(51)在閉區域 B 中爲一致收斂，可知 $\varphi(z)$ 在

B 中爲連續，而(54)式本身就表示對於函數 $\varphi(z)$ 的勾犀公式。

剩下來祇要證明級數(51)可以逐項微分任意多次。爲此，以

$$\frac{m!}{2\pi i}\frac{1}{(z'-z)^{m+1}} \qquad (m\text{ 是正整數})$$

乘級數(53)的每一項，再沿 l 積分，得：

$$\frac{m!}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(z')}{(z'-z)^{m+1}}dz' = \frac{m!}{2\pi i}\int_l \frac{u_1(z')}{(z'-z)^{m+1}}dz' + \frac{m!}{2\pi i}\int_l \frac{u_2(z')}{(z'-z)^{m+1}}dz' + \cdots$$

由勾犀公式及(54)式，上式可改寫爲：

$$(55) \qquad \varphi^{(m)}(z) = u_1^{(m)}(z) + u_2^{(m)}(z) + \cdots,$$

這就證明了在 B 的內部逐項微分 m 次的可能性。在下一節裏我們要把這定理應用到一種具特殊形式的級數上去，這種級數幾乎是我們以後唯一要遇到的，即冪級數。

註 I. 藉常用的估計積分方法易證：由導數所成的級數(55)在任何區域 B_1 中爲一致收斂，祇要 B_1 和他的境界線都包含在區域 B 的內部。對級數(55)作和：

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k^{(m)}(z)。$$

應用勾犀公式中導數的表示，有：

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_l \frac{1}{(z'-z)^{m+1}}\sum_{k=n}^{n+p} u_k(z')dz'。$$

設 δ 爲區域 B_1 的境界線 l_1 和 l 間的最短距離(圖 7)。藉通常的估計積分方法可得：

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k^{(m)}(z)\right| \leqq \frac{m!s}{2\pi\delta^{m+1}}\cdot\max_{z'\text{ 在 } l \text{ 上}}\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(z')\right|,$$

這裏 s 是 l 的長。因爲級數(53)一致收斂，上式右邊第二因子當 n 很大時可以任意小，而第一因子是個固定的正數，所以級數(55)也是一致收斂。同樣易證若 B 爲單通區域，則將 $\varphi(z)$ 逐項積分而得的級數：

$$\int_a^z u_1(z')dz' + \int_a^z u_2(z')dz' + \cdots \qquad (a \text{ 是 } B \text{ 中任意一點})$$

也在 B 中一致收斂 [比較 I, 146]，且級數中每項都是 z 在 B 中的單值正則函數[4]。

圖 7

註 II. 我們也可以不用級數而用函數列來敍述維爾史特拉斯定理 [1, 144]：設有函數列 $s_k(z)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 在以 l 爲境界線的閉區域 B 中爲正則，又這敍列在 l 上一致收斂，則敍列在閉區域 B 中亦一致收斂，其極限函數 $s(z)$ 在 B 的內部爲正則，並且對任一正整數 m，下式在 B 之內成立：

$$\lim_{k\to\infty} s_k^{(m)}(z) = s^{(m)}(z)。$$

13. 冪級數　具形式

$$(56) \qquad a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \cdots \qquad (a_i \text{ 和 } b \text{ 均爲常數})$$

的級數稱爲冪級數。最先我們研究級數(56)的收斂區域。這由下面的定理可知：

亞貝爾定理。若級數(56)在 $z=z_0$ 收斂，則在所有和 b 點相距比 z_0 和 b 點相距更近的點 z，卽滿足不等式

$$|z-b| < |z_0-b|$$

的點，級數絕對收斂，並且在任一以 b 爲中心，半徑爲 ρ，$\rho<|z_0-b|$，的圓中一致收斂。(圖 8)。

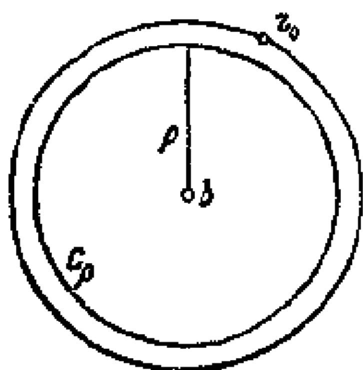


圖 8

由假設知級數

$$a_0 + a_1(z_0-b) + a_2(z_0-b)^2 + \cdots$$

收斂，所以當 $n\to\infty$ 時他的一般項 $a_n(z_0-b)^n \to 0$。因此存在一正數 N

使得對於所有的正整數 k，下式成立：

$$(57)\qquad |a_k(z_0-b)^k|<N。$$

設圓 C_ρ 的中心爲 b，半徑爲 ρ，而 $\rho<|z_0-b|$，則可記 $\rho=\theta|z_0-b|$，$0<\theta<1$。對 C_ρ 中一點 z，有：

$$(58)\qquad |z-b|\leqslant\theta|z_0-b|。$$

由(57)和(58)，在圓 C_ρ 中可以對級數(56)的一般項做下面的估計：

$$|a_k(z-b)^k|=|a_k(z_0-b)^k|\left|\frac{z-b}{z_0-b}\right|^k\leqslant N\theta^k,$$

這式子表示級數(56)的一般項的模小於一個遞減正項幾何級數的一般項，因此他在圓 C_ρ 中必絕對且一致收斂。顯然，如果任一點 z 和 b 相距比 z_0 和 b 相距更近，z 必在某一圓 C_ρ 之中，所以級數(56)在這點必爲絕對收斂。亞貝爾定理已證畢。下面是這定理的幾個推論。

推論 I. 若級數(56)在 $z=z_1$ 點發散，則在與 b 相距比 z_1 與 b 相距更遠的點級數亦爲發散。事實上，如果級數在這種點收斂的話，由亞貝爾定理他在 z_1 也必收斂，和假設衝突。因此對於級數(56)我們就可以這樣說：若級數在 z_0 點收斂，則在以 b 爲中心，$|z_0-b|$ 爲半徑的圓之內任一點級數絕對收斂；若級數在 z_1 點發散，則在以 b 爲中心，$|z_1-b|$ 爲半徑的圓之外任一點級數亦爲發散。由此立刻可知對任一冪級數(56)，存在一正數 R，使當 $|z-b|<R$ 時級數絕對收斂；當 $|z-b|>R$ 時級數發散；同時在任一以 b 爲中心，半徑小於 R 的閉圓中，級數一致收斂。R 稱爲級數(56)的收斂半徑，圓 $|z-b|<R$ 稱爲他的收斂圓(比較實變數時的類似結果[I, 148])。

注意：在這推論中我們沒法證明級數(56)在整個收斂圓 $|z-b|\leqslant R$ 中一致收斂，而祇知他在任一和收斂圓同心而半徑較小的閉圓中一致

收斂。爲簡單起見，以後就稱級數(56)在收斂圓内部一致收斂。一般，我們稱一級數在某區域内部一致收斂，如果他在任一包含於這區域之内的閉區域中都是一致收斂。

關於上面的結果還有一件重要的事要注意。就是有時收斂半徑 R 可以等於無窮大。這時級數就在平面上任一點絕對收斂，並且在任一半徑有限的閉圓中爲一致收斂。另外一種極端情形就是 $R=0$。這時級數在任一點 $z\neq b$ 爲發散。在 $z=b$ 點級數簡化只剩了第一項。以後對這種 $R=0$ 的冪級數我們不再去討論他。

推論 II. 級數(56)既然在收斂圓内部一致收斂，應用維爾史特拉斯定理就知道他的和在收斂圓内部是 z 的正則函數，因此級數就可逐項微分任意多次。因他是一致收斂級數，所以也可以逐項積分。此外，由於絕對收斂性，兩冪級數可以像多項式一般的逐項相乘。

由上面的結果可知逐項積分或逐項微分並不破壞級數在收斂圓内的收斂性，就是說，兩級數：

$$a_1+2a_2(z-b)+3a_3(z-b)^2+\cdots; \tag{59}$$

$$a_0(z-b)+\frac{a_1}{2}(z-b)^2+\cdots \tag{59_1}$$

的收斂圓都不小於級數(56)的收斂圓。易證這兩級數的收斂半徑也不能大於級數(56)的收斂半徑 R。事實上，例如設級數(59_1)的收斂半徑爲 ρ，$\rho>R$。將這級數逐項微分，仍得級數(56)。由前知必 $\rho\leqslant R$，和 $\rho>R$ 衝突。因此我們知道，逐項積分和逐項微分都不改變級數(59)的收斂半徑。

最後，注意在所有前面已經說過的裏面，一點沒有提到級數(56)在他的收斂圓圓周 $|z-b|=R$ 上的收斂性。關於這問題我們稍遲一些再討論他。

14. 泰勒級數 上面我們看到，級數(56)的和在收斂圓內部爲正則函數。現在證明其逆：任一函數 $f(z)$ 若在以 b 爲中心的圓 $|z-b|<R$ 之內爲正則，則在此圓內部函數必定可以展開爲形式如(56)的冪級數，並且這種展開式是唯一的。

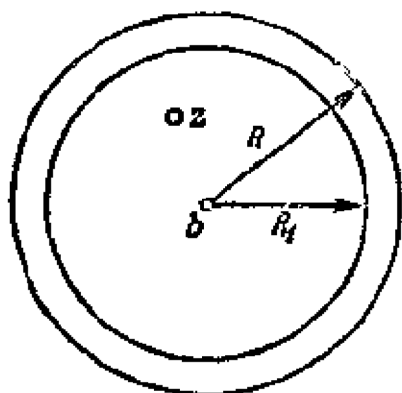


圖 9

在圓 $|z-b|<R$ 內任取一固定點 z。以 b 做中心，$R_1(<R)$ 做半徑畫一圓 C_{R_1}，包含 z 點在其內(圖 9)。藉勾犀公式我們可以把 $f(z)$ 表示爲沿 C_{R_1} 的積分：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(z')}{z'-z}dz'。\tag{60}$$

在 C_{R_1} 上有 $|z'-b|=R_1$，另一方面，因爲 z 在 C_{R_1} 之內，有 $|z-b|<R_1$。應用遞減幾何級數求和公式，可記：

$$\frac{1}{z'-z}=\frac{1}{z'-b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-b}{z'-b}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-b)^k}{(z'-b)^{k+1}},\tag{61}$$

這式右邊的級數的一般項的模是：

$$\left|\frac{(z-b)^k}{(z'-b)^{k+1}}\right|=\frac{1}{R_1}q^k \qquad \left(q=\left|\frac{z-b}{z'-b}\right|\right),$$

由前知 $0\leqslant q<1$。因此，無窮級數(61)關於 C_{R_1} 上的變數 z' 爲一致收斂。以

$$\frac{1}{2\pi i}f(z')$$

乘(61)式的兩邊，然後沿 C_{R_1} 逐項積分，由(60)式有：

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z-b)^k\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(z')}{(z'-b)^{k+1}}dz'$$

或

(62) $$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k,$$

這裏由勾犀公式[7]:

(62₁) $$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(z')}{(z'-b)^{k+1}}dz'=\frac{f^{(k)}(b)}{k!},$$

即圓 $|z-b|<R$ 內部的正則函數 $f(z)$ 在這圓中任一點 z 的數值可以展開爲泰勒級數:

(63) $$f(z)=f(b)+\frac{f'(b)}{1!}(z-b)+\frac{f''(b)}{2!}(z-b)^2+\cdots。$$

現在再證明 $f(z)$ 的冪級數展開式是唯一的。設 $f(z)$ 在某一以 b 爲中心的圓內可以展開爲形式如(62)的級數。我們證明係數 a_k 必定可用唯一的方法來決定,就是他們須是 $f(z)$ 的泰勒係數。實際上,在(62)中令 $z=b$,即得 $a_0=f(b)$。微分冪級數(62),得:

$$f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_k(z-b)^{k-1}。$$

令 $z=b$,得 $a_1=f'(b)$。用同樣辦法做去,一般可得:

$$a_k=\frac{f^{(k)}(b)}{k!},$$

而這級數就與泰勒級數(63)全同。因此,假如我們可以用兩種辦法把同一個函數展開爲 $(z-b)$ 的指數爲正整數的冪級數,則在兩級數中含 $(z-b)$ 的冪次相同的兩項的係數也必相等。

上面的論斷告訴我們,如果函數 $f(z)$ 在一個以 b 做中心的圓內爲正則,$f(z)$ 的泰勒級數(63)在這圓之內就收斂,並且級數之和等於 $f(z)$。

藉泰勒級數中係數的表達式(62₁)可以估計這些係數的大小。設 R 爲級數(62)的收斂半徑。在(62₁)中取 C_{R_1} 的中心爲 b,$R_1=R-\varepsilon$,ε 是固定的小正數。在圓周 C_{R_1} 上 $f(z)$ 爲正則,$|f(z)|$ 不大於一定正數

M，並且 $|z'-b|=R-\varepsilon$。用通常估計積分的辦法可得：

$$|a_k| \leqslant \frac{M}{(R-\varepsilon)^k}。 \tag{64}$$

ε 可任意接近於零，但顯然 M 的大小也和 ε 的選擇有關。

現在應用[12]中證明了的維爾史特拉斯定理於冪級數。設在以 b 爲中心的圓 C_R 內部有一正則函數列：

$$u_k(z)=a_0^{(k)}+a_1^{(k)}(z-b)+a_2^{(k)}(z-b)^2+\cdots,\ (k=1,2,\cdots)。$$

又設級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

在這圓內部一致收斂。由維爾史特拉斯定理，這級數的和也是圓內的正則函數，因此可以展開爲冪級數：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_0^{(k)}+a_1^{(k)}(z-b)+a_2^{(k)}(z-b)^2+\cdots\right]=$$

$$=a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\cdots,$$

並且還可以逐項微分任意多次。每微分一次以後就令 $z=b$，我們可以得到上式右邊諸係數的級數表達式：

$$a_0=\sum_{k=1}^{\infty} a_0^{(k)};\quad a_1=\sum_{k=1}^{\infty} a_1^{(k)};\quad a_2=\sum_{k=1}^{\infty} a_2^{(k)};\quad \cdots,$$

就是說，由已給的假設，前面那些無窮級數可以像多項式相加一般的加在一起。

15. 羅朗級數 對於具更一般形式的冪級數：

$$\cdots+a_{-2}(z-b)^{-2}+a_{-1}(z-b)^{-1}+a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\cdots, \tag{65}$$

他不但含有 $(z-b)$ 的正整數冪，而且也含有 $(z-b)$ 的負整數冪的，我們不難得到和前節類似的結果。像這種形式的冪級數通常稱爲羅朗級數。最先，我們看應該如何來決定他的收斂區域。級數(65)是由兩級數

(66₁) $$a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\cdots$$

和

(66₂) $$\frac{a_{-1}}{z-b}+\frac{a_{-2}}{(z-b)^2}+\cdots$$

所合成，如果我們能決定一個區域，使上面兩級數在其中同時爲收斂，那末這就是級數(65)的收斂區域了。級數(66₁)即上節所研究的尋常冪級數，所以他的收斂區域是以 b 爲中心的一個圓。設這圓是 $|z-b|<R_1$。要研究級數(66₂)，可以引進另一變數 $z'=(z-b)^{-1}$ 以代替 z。經過這變換之後級數(66₂)變成通常的冪級數：

$$a_{-1}z'+a_{-2}z'^2+\cdots$$

他在 z' 平面上的收斂區域是一個以原點爲中心的圓(這時 b 等於零)。這圓的半徑記爲 $\frac{1}{R_2}$，則上述冪級數的收斂區域就是 $|z'|<\frac{1}{R_2}$ 或 $\frac{1}{|z'|}>R_2$。回到原來的變數 z，得到收斂區域爲 $|z-b|>R_2$。這樣，級數(65)的收斂區域就由兩個不等式

(67) $$|z-b|<R_1;\quad |z-b|>R_2$$

來決定。

第一個不等式所定義的區域是以 b 爲中心，R_1 爲半徑的圓的內部，就是級數(66₁)的收斂區域。第二個不等式所定義的區域是以 b 爲中心，R_2 爲半徑的圓的外部，即級數(66₂)的收斂區域。若 $R_1\leqslant R_2$，則(67)中兩不等式不定義任何區域。若 $R_1>R_2$，這兩個不等式就定義一圓環：

(68) $$R_2<|z-b|<R_1,$$

由兩個以 b 爲中心，半徑爲 R_2 及 R_1 的同心圓所圍成。因此知道形式如(65)的級數的收斂區域是一個圓環(68)。

上面我們把級數(65)分成兩個冪級數，所以由前節關於冪級數的定理立刻可知：級數(65)在其收斂環的內部絕對且一致收斂，級數的和是正則函數，並且級數可以逐項微分。注意，在環的定義方程(68)中，內半徑 R_2 有時可以等於零，這時級數(65)在所有和 b 相當鄰近的點 z 必爲收斂。同樣，外半徑 R_1 有時可以等於無窮大，這時級數在所有滿足條件 $|z-b|>R_2$ 的點 z 爲收斂。若這環由不等式 $0<|z-b|<\infty$ 所定義，則級數(65)在全平面除了 $z=b$ 點以外爲收斂。

我們還要注意，羅朗級數(65)中含 $(z-b)$ 的正整數冪各項所成的部分級數不但在環(68)中爲收斂，並且也在環的外周以內，即 $|z-b|<R_1$ 中，爲處處收斂；而含 $(z-b)$ 的負整數冪各項所成的部分級數則在環的內周以外，即 $|z-b|>R_2$ 中，爲處處收斂。例如，若級數只含有限個冪次爲負的項，當然就有 $R_2=0$，若級數只含有限個冪次爲正的項，那末就有 $R_1=\infty$。再提醒一次，就是我們現在祇研究那種 $R_2<R_1$ 的羅朗級數，因爲在別的情形級數沒有收斂區域。

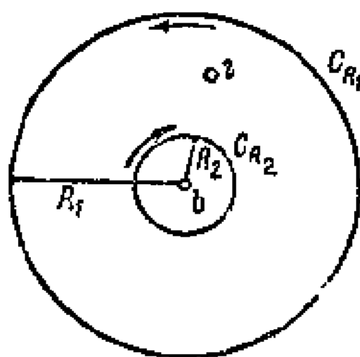


圖 10

和冪級數的情形一樣，我們現在可以證明上述事實之逆，即：若 $f(z)$ 在環(68)的內部爲正則，他就可以在其中用羅朗級數展開，並且這種展開式是唯一的。

把環的外周稍稍縮小，內周稍稍擴大，我們可以假設 $f(z)$ 在環的兩境界線上也是正則。記這兩境界線爲 C_{R_2} 和 C_{R_1}。對環的內部任一點 z，由勾犀公式有(圖 10)：

$$(69)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_2}}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz'.$$

對沿 C_{R_1} 的積分有：

$$\left|\frac{z-b}{z'-b}\right|<1,$$

因此,和證明泰勒公式一樣,我們可以用一個在圓周 C_{R_1} 上爲一致收斂的級數展開積分符號之內的分數:

$$\frac{1}{z'-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-b)^k}{(z'-b)^{k+1}}。$$

兩邊乘以

$$\frac{1}{2\pi i}f(z'),\tag{70}$$

再沿 C_{R_1} 積分,就知道(69)式右邊第一項的積分可以用一個祇含 $(z-b)$ 的正整數冪的冪級數來展開:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\circlearrowleft C_{R_1}}\frac{f(z')}{z'-z}dz'=a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\cdots,$$

其中
$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\circlearrowleft C_{R_1}}\frac{f(z')}{(z'-b)^{k+1}}dz'。$$

相反的,對沿 C_{R_2} 的積分有:

$$\left|\frac{z'-b}{z-b}\right|<1,$$

而對於前述的分數,我們必須用另外辦法把他展開爲一個在圓周 C_{R_2} 上一致收斂的級數:

$$\frac{1}{z'-z}=-\frac{1}{z-b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z'-b}{z-b}}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z'-b)^k}{(z-b)^{k+1}},$$

由此,再用(70)中的乘數乘等式兩邊,然後沿 C_{R_2} 積分,就得到(69)式右邊第二項的冪級數展開式;其中 $(z-b)$ 的冪次都是負整數:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\circlearrowleft C_{R_2}}\frac{f(z')}{z'-z}dz'=a_{-1}(z-b)^{-1}+a_{-2}(z-b)^{-2}+\cdots,$$

其中
$$a_{-k}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\circlearrowleft C_{R_2}}(z'-b)^{k-1}f(z')dz'。$$

把兩項加在一起，就得到函數$f(z)$在環的內部的羅朗級數展開式：

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-b)^k\text{。} \tag{71}$$

剩下來要證明這種展開式是唯一的。和泰勒級數的情形一樣，只要證明如果$f(z)$可以依(71)形式展開，則係數a_k就有完全一定的表達式。設l爲包含b點在其內部而在環(68)中的閉線路。在這線路上級數(71)一致收斂。對任一整數m，以$(z-b)^{-m-1}$乘(71)式的兩邊，再沿l作逆時針方向的積分，卽得：

$$\int_l (z-b)^{-m-1}f(z)dz=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\int_l (z-b)^{k-m-1}dz\text{。}$$

由[6]我們知道等式右邊所有的積分都等於零，除了被積函數是$(z-b)^{-1}$的那一項之外。這不等於零的積分對應於$k=m$，並且他的數值易知爲$2\pi i$。這樣上式就變爲：

$$\int_l (z-b)^{-m-1}f(z)dz=2\pi i\, a_m,$$

由此卽得係數的一定的表達式：

$$a_m=\frac{1}{2\pi i}\int_l (z-b)^{-m-1}f(z)dz \qquad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)\text{。} \tag{72}$$

16. 例題 應用泰勒展開式於初等超越函數，可以得到在微分學中早已知道的他們的冪級數展開式，但現在對於自變數取複數值的函數也適用了。

例1 對函數$f(z)=e^z$顯然有$f^{(n)}(z)=e^z$，因此有$f^{(n)}(0)=1$。代入公式(63)，並設$b=0$（麥克勞林級數），得：

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots \tag{73}$$

函數e^z在全平面爲正則，因此(73)的展開式在全平面有效。

同樣可得在全平面上有效的三角函數的展開式：

(74) $$\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$$

(75) $$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$$

例 II　幾何級數

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots$$

給我們一個以$|z|<1$為收斂圓的級數的例子。

在這級數中以$(-z)$代z，再從零積分到z：

(76) $$\varphi(z)=\int_0^z\frac{dz}{1+z}=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots$$

這樣我們就得到另一冪級數，他的收斂圓也是$|z|<1$。當z取實數值時這級數的和已知為$\lg(1+z)$。[I, 132]。現在證明對單位圓$|z|<1$中的複數z，上面的事實一樣成立。準確些說，就是要證明上級數的和

(77) $$\varphi(z)=\int_0^z\frac{dz}{1+z}$$

滿足方程式

(78) $$e^{\varphi(z)}=1+z。$$

取在圓$|z|<1$之內為正則的函數$e^{\varphi(z)}=f(z)$，再求他的麥克勞林展開式。為此，先要求這函數的導數。記住$\varphi'(z)=\frac{1}{1+z}$，因此有：

(79) $$f'(z)=e^{\varphi(z)}\cdot\frac{1}{1+z}$$

又 $$f''(z)=e^{\varphi(z)}\cdot\frac{1}{(1+z)^2}-e^{\varphi(z)}\cdot\frac{1}{(1+z)^2}=0,$$

所以$f^{(n)}(z)=0$當$n\geqslant 2$。此外，由(77)和(79)兩式易知$f(0)=e^0=1$

及$f'(0)=1$。因此$f(z)$的麥克勞林展開式是:

$$f(z)=e^{\varphi(z)}=1+z。$$

因此我們知道級數(76)的和是$\lg(1+z)$的一個可能值。後者是個多值函數,而級數(76)分得他的一個在圓$|z|<1$之內爲正則的單值支頁:

$$\lg(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots。\tag{80}$$

由這公式所決定的對數值有時稱爲對數的主值。在收斂圓圓周$|z|=1$上函數$\lg(1+z)$有一奇異點$z=-1$。這種奇異點的特徵將於以後說明之。

例III　現在看函數$(1+z)^m$。當m爲正整數時函數依照z的正整數冪的展開式就是通常的牛頓二項式公式。當m爲負整數時函數以$z=-1$爲極點。逐次求其導數,再做麥克勞林級數,即得函數在圓$|z|<1$內的展開式[I, 131]:

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3+\cdots。\tag{81}$$

如果m不是整數,$(1+z)^m$就是多值函數。例如當$m=\frac{1}{2}$時有$\sqrt{1+z}$。一般,對常數m的任一值,函數可改寫爲如下之形式[I, 176]:

$$(1+z)^m=e^{m\lg(1+z)},\tag{82}$$

他的多值性是由$\lg(1+z)$的多值性而來。若取(80)式所決定的數值爲$\lg(1+z)$的值,則函數(82)亦爲圓$|z|<1$中的單值正則函數。藉(77)式逐次求其導數,可得:

$$[(1+z)^m]'=e^{m\lg(1+z)}\cdot\frac{m}{1+z}=me^{(m-1)\lg(1+z)}=m(1+z)^{m-1},$$

$$[(1+z)^m]''=m(m-1)e^{(m-2)\lg(1+z)}=m(m-1)(1+z)^{m-2},$$

一般

$$[(1+z)^m]^{(k)}=m(m-1)\cdots(m-k+1)e^{(m-k)\lg(1+z)}=$$
$$=m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+z)^{m-k},$$

其中 $\lg(1+z)$ 由級數(80)所決定。現在注意:由級數(80)所決定的 $\lg(1+z)$ 當 $z=0$ 時其值爲零。因此,由(82)式及其後各式可得:

$$(1+z)^m|_{z=0}=1;\quad [(1+z)^m]'|_{z=0}=m,$$

一般
$$[(1+z)^m]^{(k)}|_{z=0}=m(m-1)\cdots(m-k+1)。$$

由此可見函數(82)的麥克勞林級數與級數(81)全同,即對任一指數 m 公式(81)在圓 $|z|<1$ 中決定函數(82)的一個正則的單值支頁。(81)式以後仍稱爲牛頓二項式公式。

例 IV　在例 II 的幾何級數中以 $(-z^2)$ 代 z,即得在圓 $|z|<1$ 中爲有效的展開式:

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-\cdots$$

將上式兩邊從零到 z 積分,得到另一展開式,也在圓 $|z|<1$ 中有效:

$$\int_0^z\frac{dz}{1+z^2}=\frac{z}{1}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots。\tag{83}$$

以後可以看到這級數的和是 $\operatorname{arc\,tg} z$ 的一個可能值。因此(83)式就在圓 $|z|<1$ 中定義多值函數 $\operatorname{arc\,tg} z$ 的一個支頁,這支頁在該圓中爲單值正則函數。

用類似的辦法可以得到多值函數 $\arcsin z$ 的一個支頁在同一圓中的展開式:

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{z}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{z^5}{5}+\cdots。\tag{84}$$

例 V　再看函數

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}。$$

$z=0$, $z=1$, $z=2$ 是這函數的極點，除這三點外，他是全平面上的單值正則函數。現在看下面三個圓環，都以原點爲中心：

$$(K_1)\quad 0<|z|<1;\quad (K_2)\quad 1<|z|<2;\quad (K_3)\quad 2<|z|<+\infty。$$

在每一環中函數可以展開爲含 z 的整數冪的羅朗級數。例如在環 K_2 中，先把 $f(z)$ 分解爲最簡部分分式：

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2}。$$

因爲這時 $1<|z|<2$，所以在 K_2 的內部有：

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}};\quad \frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2}\;\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^k}。$$

代入前式得：

$$f(z)=-\frac{1}{2}\;\frac{1}{z}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{z^k}-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^k}。$$

在 K_3 中 $|z|>2$，用類似的辦法可以得到函數的展開式，只含 z 的負整數冪：

$$\frac{1}{z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}};\quad \frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}}$$

故

$$f(z)=\sum_{k=2}^{\infty}(2^{k-1}-1)\frac{1}{z^{k+1}}。$$

這函數也在別的環中爲正則，例如在以 $z=1$ 爲中心，內半徑 $R_2=0$，外半徑 $R_1=1$ 的環中就是。易證在這環中函數可展開爲羅朗級數，只含 $(z-1)$ 的整數冪。

例 VI 現在看兩冪級數的商

$$\frac{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots}{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots}\tag{85}$$

設這兩級數的收斂半徑都不小於一正數 ρ。又設分母中的級數的常數項 a_0 不等於零。則分母中的級數不但在原點不等於零，並且在某一以原點爲中心的圓內也不等於零。假設他在圓 $|z|<\rho_1$ 中爲正則，且不等於零。那末我們可以斷定整個分式(85)在以原點爲中心，半徑爲 $\min(\rho,\rho_1)$ 的圓中（或可能在更大的圓中）亦爲正則。因此在這圓中他就可以展開爲冪級數

$$\frac{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots}{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

要計算係數 c_k，可以將上式右邊的商式用除式來乘，其積可以改寫成冪級數的形式，並且應該等於被除式：

$$a_0c_0+(a_1c_0+a_0c_1)z+(a_2c_0+a_1c_1+a_0c_2)z^2+\cdots=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots$$

由冪級數展開式的唯一性，可知上式要成立，必須對應項的係數都相等。因此就得到一列的等式，藉此可以決定商式的未知係數 c_k：

$$
\begin{cases}
a_0c_0 & = b_0 \\
a_1c_0 + a_0c_1 & = b_1 \\
a_2c_0 + a_1c_1 + a_0c_2 & = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{cases}
\tag{86}
$$

由這些式子我們可以逐步來計算係數 c_k。例如 (86) 中最初 $(n+1)$ 個方程式可以看做一組含未知數 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 的聯立方程，依克兰姆公式解之，可明白的將係數 c_n 表示爲兩行列式的商：

$$
c_n = \frac{\begin{vmatrix} a_0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & b_0 \\ a_1, & a_0, & 0, & \cdots, & 0, & b_1 \\ a_2, & a_1, & a_0, & \cdots, & 0, & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_{n-3}, & \cdots, & a_0, & b_{n-1} \\ a_n, & a_{n-1}, & a_{n-2}, & \cdots, & a_1, & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0 \\ a_1, & a_0, & 0, & \cdots, & 0, & 0 \\ a_2, & a_1, & a_0, & \cdots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_{n-3}, & \cdots, & a_0, & 0 \\ a_n, & a_{n-1}, & a_{n-2}, & \cdots, & a_1, & a_0 \end{vmatrix}}。 \tag{87}
$$

應用這理論於

$$
\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\dfrac{z}{1!} - \dfrac{z^3}{3!} + \cdots}{1 - \dfrac{z^2}{2!} + \cdots},
$$

可將 $\operatorname{tg} z$ 在圓 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 內展開爲冪級數，因爲我們早已知道 $\cos z$ 祇有實零點，並且他們的位置也早在三角學中被確定了。

17. 孤立奇異點，無限遠點　設函數 $f(z)$ 在 $z=b$ 的鄰域中爲單值正則，但在 b 點則否。那末他就在以 b 點爲中心，內半徑爲零的某一環域中爲正則，因此在環的內部，卽在 b 點的鄰域中，可以依 $(z-b)$ 的整數冪展開爲羅朗級數。這時可以想到有三種可能性：(1)級數中沒有含 $(z-b)$ 的負整數冪的項，(2)級數中祇有有限個含 $(z-b)$ 的負數冪的項，(3)級數中有無限個含 $(z-b)$ 的負數冪的項。

在第一種情形，級數中既然沒有含 $(z-b)$ 的負數冪的項，根本就是泰勒級數，所以函數在 $z=b$ 也是正則。再看第二種情形，這時級數的形式如下：

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty} a_k(z-b)^k。\tag{88}$$

其中係數 a_{-m} 可以假定已經不等於零。我們可將(88)式改寫爲：

$$f(z)=\frac{1}{(z-b)^m}[a_{-m}+a_{-m+1}(z-b)+a_{-m+2}(z-b)^2+\cdots]。$$

當 z 趨向 b 時，上式右邊括弧外面的因子趨向無窮大，而括弧裏面的級數趨向一個有限而不等於零的極限值 a_{-m}（冪級數的和是連續函數），因此二者的積就趨向無窮大。這樣，依照[10]中已規定了的術語，在第二種情形 b 就是函數 $f(z)$ 的極點。現在再引進幾個常用的術語，即當 $f(z)$ 的展開式是(88)的形式時，b 稱爲他的 m 階極點；含負數冪各項之和

$$\frac{a_{-m}}{(z-b)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-b)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-b} \qquad (a_{-m}\neq 0)$$

稱爲對應於這極點的無限部分。$(z-b)^{-1}$ 的係數 a_{-1} 有個特別名稱，即函數 $f(z)$ 在極點 b 的留數。

現在證明若 b 是極點，則函數必有如(88)的展開式。爲此，設 $f(z)$ 在 b 的鄰域中爲單值正則，又當 $z\to b$ 時 $f(z)$ 趨向無窮大。要證明 $f(z)$ 有如(88)的展開式。先看函數

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}。$$

他在 b 點的鄰域中爲正則，又當 $z\to b$ 時他的極限是零。因此 $\varphi(z)$ 在 b 點也是正則[10]，而在這點的數值也就等於零。寫出 $\varphi(z)$ 在這點的泰勒展開式，其中 $(z-b)$ 的零次項當然爲零。假設最先不等於零的項含 $(z-b)$ 的冪次爲 m，即

$$\varphi(z)=b_m(z-b)^m+b_{m+1}(z-b)^{m+1}+\cdots \qquad (b_m\neq 0)$$

對函數 $f(z)$ 於是就有下式：

$$f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{(z-b)^m}\cdot\frac{1}{b_m+b_{m+1}(z-b)+\cdots}。$$

上式右邊第二個分數的分母當 $z=b$ 時不等於零，所以這分數可依 $(z-b)$ 的正冪展開爲泰勒級數。以 $(z-b)^m$ 除這級數，卽得如(88)的展開式。把這結果和以前的比較，可以知道在 [10] 中所引進的極點的概念和現在所說的這種奇異點的概念相當，在這種奇異點的鄰近函數可展開爲羅朗級數，其中祇有有限個項含 $(z-b)$ 的負冪。從而可知在本性奇異點的鄰近函數 $f(z)$ 的羅朗展開式中必有無限個項含 $(z-b)$ 的負冪。這時，和在極點的情形一樣，我們稱 $(z-b)^{-1}$ 的係數爲 $f(z)$ 在本性奇異點 b 的留數。

注意，在 $\varphi(z)$ 的展開式中不爲零的係數 b_m 必定存在，因若不然，則 $\varphi(z)$ 將在以 b 爲中心的某一圓中恆等於零，這是和 $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$ 衝突的，因爲由假設 $f(z)$ 在 $z=b$ 的鄰域中爲正則。

現在引進平面上的無限遠點這個概念。我們將假定平面上祇有一個無限遠點。平面上任一以原點爲中心的圓的外部都稱爲無限遠點的鄰域。這鄰域可由不等式 $|z|>R$ 來定義。當然，我們也可以不取原點做這種圓的中心，卽無限遠點的鄰域亦可以改用不等式 $|z-a|>R$ 來定義，這和前面的定義並無本質上的不同。我們以後還是用第一個條件 $|z|>R$ 來定義這種鄰域。

設 $f(z)$ 在無限遠點的鄰域中爲單值正則，我們可以把這鄰域看做一個圓環，其內半徑等於 R，而外半徑等於無窮大。在這環中 $f(z)$ 應該可以依 z 的整數冪展開爲羅朗級數。和前面一樣，我們可以想像到三種情形。

第一種情形，假設羅朗級數中沒有含 z 的正整數冪的項，即展開式的形式為：

$$f(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots \tag{89}$$

在這種情形，當 $z\to\infty$ 時 $f(z)$ 趨向有限極限值 a_0，稱 $f(z)$ 在無限遠點為正則，且 $f(\infty)=a_0$。

第二種情形，假設羅朗展開式中祇有有限個項含 z 的正冪：

$$f(z)=a_{-m}z^m+a_{-m+1}z^{m-1}+\cdots+a_{-1}z+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots \tag{90}$$

$$(a_{-m}\neq 0)$$

和從前一樣，把等式右邊括出一個因子 z^m，我們可以證明當 $z\to\infty$ 時 $f(z)$ 趨向無窮大，並且 $\frac{f(z)}{z^m}$ 趨向有限而不為零的極限值 a_{-m}。在這種情形，無限遠點稱為 $f(z)$ 的 m 階極點，而 m 項之和 $(a_{-m}z^m+\cdots+a_{-1}z)$ 稱為在這極點的無限部份。

最後，若展開式中有無限個項含 z 的正冪：

$$f(z)=\cdots a_{-2}z^2+a_{-1}z+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots, \tag{91}$$

則無限遠點稱為函數 $f(z)$ 的本性奇異點。若藉公式

$$z=\frac{1}{t};\quad t=\frac{1}{z}$$

以另一自變數 t 代替 z，則 z 平面上無限遠點的鄰域變為 t 平面上原點的鄰域，而展開式(91)中就有無限個項含 t 的負冪。因此知道，若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇異點，則當 z 在一個以原點為中心任意大的圓的外部變動時，$f(z)$ 的值可以隨意接近於任一已給的複數值，並且 $f(z)$ 可以取任一複數值無限多次，可能除了一個以外[10]。在所有上述三種情形中，z^{-1} 的係數 a_1 的反號數，即 $(-a_1)$，稱為函數在無限遠點的留

數。爲什麼要這樣定義的理由，將來再說。

注意：若 $z=a$ 是函數 $f(z)$ 的極點，則記 $f(a)=\infty$，並且稱 $w=f(z)$ 將 $z=a$ 點變爲無限遠點。若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的極點，則記 $f(\infty)=\infty$，且稱 $w=f(z)$ 將無限遠點變爲他自己，就是使無限遠點不動。

回到[7]，我們看到對於包含無限遠點的區域，勾犀公式可適用的條件是：

$$f(z)\text{一致趨向零，當 } z\to\infty\text{。}$$

其含義就是：$f(z)$ 在無限遠點爲正則，且在展開式(89)中 $a_0=0$，卽 $f(\infty)=0$。

例 I. 我們早已說過函數 e^z 在全平面爲正則，那時當然沒有把無限遠點計算在內。函數 e^z 的展開式爲處處有效，特別，在無限遠點的鄰域中亦然。這展開式中有無限個項含 z 的正冪，因此，無限遠點就是 e^z 的本性奇異點。對於 $\sin z$ 和 $\cos z$ 也可以說同樣的話。

例 II. 任一多項式必爲全平面的正則函數，顯然，他以無限遠點爲極點，其階數等於多項式的次數。

再看有理函數，卽兩多項式的商：

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=f(z)\text{。}$$

這裏假定分式爲不可約，卽分子和分母沒有相同的零點。多項式 $\psi(z)$ 的零點是 $f(z)$ 的有限遠奇異點，這些奇異點當然都是極點。至於函數在無限遠點的行爲，則繫於兩多項式 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的次數。若 $\varphi(z)$ 較 $\psi(z)$ 高過 m 次，則當 $z\to\infty$ 時 $f(z)$ 趨向無窮大，但比率 $\frac{f(z)}{z^m}$ 則趨向一個有限而不等於零的極限值，卽函數以無限遠點爲 m 階極點。若 $\varphi(z)$ 的次數不高於 $\psi(z)$ 的次數，則函數 $f(z)$ 在無限遠點爲正則。

18. 解析延拓　若函數 $f(z)$ 在區域 B 中爲正則，自然就發生下

面的問題——函數的定義域能擴大嗎？就是說，能不能做一個更大的區域 C，包含 B 在其內，並且在這較大的區域中定義一個正則函數 $F(z)$，他在原區域 B 中和 $f(z)$ 全同。這種正則函數定義域的擴大，或者可以說是正則函數的外推，稱為函數的解析延拓。可證若這種解析延拓為可能時，他是完全唯一確定的。就在這一點，複變數的正則函數和實變數的連續函數間有着本質上的區別。事實上，若在區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 中已給一個實變數 x 的連續函數 $\omega(x)$，我們顯然可用無限多種辦法將這函數的圖形延長到區間之外而不破壞其連續性。但是對複變數的正則函數 $f(z)$，他在原區域 B 中的數值卻完全決定了他在這區域以外的數值。祇要區域的擴大，即解析延拓一般是可能的話。還可以注意的，即在完成了解析延拓以後，我們也就可以談多值函數了。這一節的目的就是要說明在研究解析延拓時可能遇到的一切事情，特別是延拓的唯一性的證明。

下面先說明正則函數的幾個性質。

設 $z=b$ 是正則函數 $f(z)$ 的零點，則在以 b 為中心的泰勒級數中，$(z-b)$ 的零次項必不存在，而且可能其後連接幾項都不存在。假設最先不等於零的項含 $(z-b)^m$，即

$$f(z)=a_m(z-b)^m+a_{m+1}(z-b)^{m+1}+\cdots \qquad (a_m\neq 0) \tag{92}$$

或

$$f(z)=(z-b)^m[a_m+a_{m+1}(z-b)+\cdots]。 \tag{93}$$

這時 $z=b$ 稱為 $f(z)$ 的 m 重零點。回到 (93) 式。設 z 取一和 b 鄰近而不等於 b 的值，則 $(z-b)^m$ 不等於零，而方括弧中級數的和的數值與不等於零的數 a_m 很接近，因此也不等於零。所以在所有和正則函數的零點相當接近的點，這函數的數值都不等於零。換句話說，正則函數的零點是孤立點。以上我們當然已假設泰勒展開式中至少有一項不

等於零。在相反的情形,在我們求泰勒展開式的那個圓中這函數應恆等於零。根據上面的論斷,現在證明一個定理,他是研究解析延拓的唯一性這個問題的基礎。

定理　若$f(z)$在區域B內為正則,又在B的子區域β中其值為零,則$f(z)$在整個區域B中恆等於零。

我們用反證法。假設$f(z)$在B中某點c不等於零。在β中取一點b,以區域B中一曲線l連接b和c。在這曲線上和b點相連的某一部分,函數之值為零,而在曲線上和c點相連的某一部分,函數不等於零,因此曲線l上必定存在一點d,使在整個曲線段bd上函數之值為零,而在曲線段dc上存在任意接近於d的點,使函數在這點的數值不等於零。因正則函數必為連續,所以d也是$f(z)$的零點。但這零點並非孤立,因為l上全部bd弧都是函數的零點。故由前面的論斷,以d為中心的泰勒展開式應該恆等於零,從而函數本身就應該在某一以d為中心的圓中恆等於零。即曲線l上有一和d點相連而屬於dc的部分線段,在這線段上函數恆等於零。這和前面所假定在曲線段dc上存在任意接近於d的點,使函數在這點的數值不等於零一事衝突。因此上述定理就得以證明。

註　若將上定理中的條件減輕為:$f(z)$在區域B中某一曲線上之值為零,定理依然成立。因為這時函數顯然應該在一個以這曲線上某點為中心的圓中恆等於零。

還可以再少一些,祇須假設$f(z)$的零點在B中有聚點就夠了。即在B中存在這種點b,使以b為中心的任意小的圓中都包含$f(z)$的無數個零點。這時,由前面的理論,以b為中心的$f(z)$的泰勒級數應該恆等於零,從而$f(z)$就應在某一以b為中心的圓中恆等於零,即$f(z)$應在B中處處為零。

推論　設二函數 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在 B 中爲正則，且在 B 的子區域 β 中（或 B 中某曲線 l 上）全同。則二者之差應該在 β 中（或 l 上）等於零，故由上定理應在 B 中恆等於零。就是說，若某區域中兩正則函數在一子區域內（或一曲線上）全同，則必在全區域中全同。

設有兩函數在區域 B 中一點 b 的數值相等，並且在這點兩函數的所有各階導數都相等。這時，以 b 爲中心的兩個泰勒展開式也相同，卽兩函數須在以 b 爲中心的某一圓中全同，從而在整個區域 B 中也應全同，就是說，兩正則函數的數值和各階導數的數值在一區域中某一點的全同帶來兩函數在全區域中的全同。

現在回到解析延拓的問題。設 $f_1(z)$ 在區域 B_1 中爲正則，又設我們已經做成另一區域 B_2，他和 B_1 有一公共部分 $B_{1,2}$（也是一個區域；圖 11）；並且在 B_2 中定義了一個正則函數 $f_2(z)$，他在 $B_{1,2}$ 中和 $f_1(z)$ 全同。$f_2(z)$ 可稱爲從 B_1 經過 $B_{1,2}$ 到 B_2 的 $f_1(z)$ 的直接解析延拓。在 B_1 中定義作 $f_1(z)$，在 B_2 中定義作 $f_2(z)$ 的函數是在這擴大的區域中的一個正則函數。現在我們證明不能存在兩個不同的解析延拓。事實上，設 $f_1(z)$ 有兩個不同的解析延拓從 B_1 經過 $B_{1,2}$ 到 B_2，這兩個在 B_2 中的正則函數 $f_2^{(1)}(z)$ 和 $f_2^{(2)}(z)$ 在 $B_{1,2}$ 中應該和 $f_1(z)$ 全同，因而也就彼此全同。由前面已證的，知道他們在整個區域 B_2 中全同，卽 $f_1(z)$ 的解析延拓祇有一個。

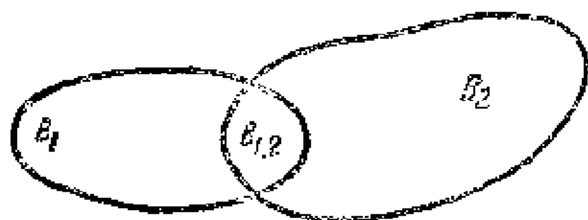


圖 11

現在假設有一串的區域 $B_1, B_2, B_3, \cdots$，這裏 B_1 和 B_2 有公共部分 $B_{1,2}$，B_2 和 B_3 有公共部分 $B_{2,3}$，等等。B_2 中有一正則函數 $f_2(z)$，他在 $B_{1,2}$ 中和 $f_1(z)$ 全同，B_3 中有一正則函數 $f_3(z)$，他在 $B_{2,3}$ 中和

$f_2(z)$全同，等等。這樣，藉助於這一串的區域，我們就得到$f_1(z)$的一個解析延拓。注意：一般說來，諸區域B_s除了上面已說過的公共部分$B_{k,k+1}$之外，還可以互相重疊。例如，看一個由三個區域B_1，B_2和B_3所成的串，假設B_3和B_1重疊(圖 12)。在這圖上畫有斜行黑線的重疊部分，B_1中所定義的$f_1(z)$的數值和B_3中所定義的$f_3(z)$的數值可能不同，而這時由解析延拓我們就可以得到多值函數。但是這種多值性我們是可以幾何地避免他的，即若$f_1(z)$和$f_3(z)$在黑線區域不全同時，就可把這區域看做由兩頁所合成，一頁屬於B_1，而另一頁屬於B_3。

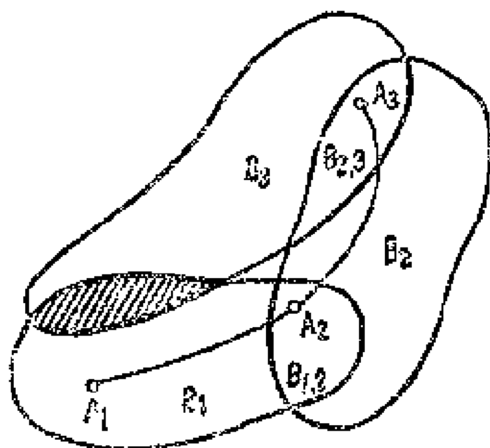


圖 12

這種多值性的事實有時在解析延拓的第一步就可以遇到。例如，設有$f_1(z)$的一個解析延拓從B_1經過$B_{1,2}$到B_2(圖 13)。但B_2和B_1還有另一公共部分β。在β中$f_2(z)$可以不和$f_1(z)$全同。由函數$f_1(z)$出發，藉助於所有可能的解析延拓而得到的函數值全體，決定唯一的函數，稱爲解析函數，以$f(z)$記之。如我們已經說過，$f(z)$可以是多值函數。

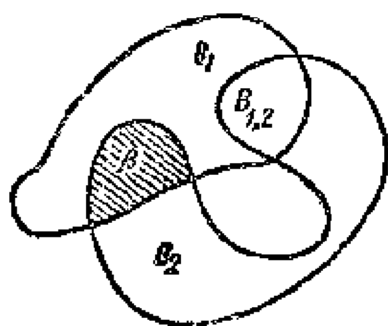


圖 13

有時，代替藉助於一串區域的解析延拓，我們也講沿某一曲線的解析延拓。設有一曲線l，被分爲依次相續的小段：P_1Q_1，P_2Q_2，…，P_nQ_n，使P_kQ_k和$P_{k+1}Q_{k+1}$常有一公共部分$P_{k+1}Q_k$(圖 14)。設這曲線l被一串區域B_1，B_2，…，B_k，…所遮蓋，使P_kQ_k處於B_k之內。B_k和B_{k+1}的公共部分而包含l上$P_{k+1}Q_k$段在其內的，記之爲$B_{k,k+1}$(B_k和B_{k+1}

的公共部分可能分為幾個或甚至無數個區域，但現在我們祇取包含 $P_{k+1}Q_k$ 的那一個區域)。

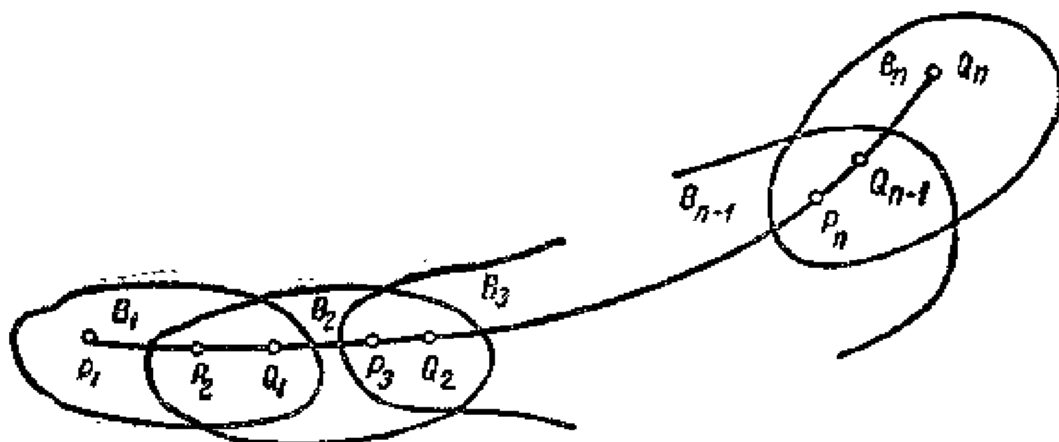


圖 14

設在 B_1 中有正則函數 $f_1(z)$，並且他可以藉助於這串區域 $B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots, B_n$ 經過 $B_{1,2}, B_{2,3}, \cdots, B_{n-1,n}$ 而被延拓，那末我們也稱 $f_1(z)$ 可以沿曲線 l 被延拓。函數在線段 P_1Q_1 上(以及在這線段的鄰域中)的數值是已給的，因此由本節的基本定理，和前面一樣，我們可以證明沿 l 的解析延拓若為可能時，必定是唯一的。他和 l 上的分段法以及具前述那些性質的區域的取法都沒有關係。

回顧藉助於一串已定區域 B_k 的沿 l 的解析延拓。在 l 上每點的鄰域中，解析函數 $f(z)$ 有一定的泰勒級數展開式。這級數稱為函數在曲線 l 上對應點的元素。若固定兩端點 P_1 和 Q_n，將曲線 l 稍稍變形，他不會跑到諸區域 B_k 之外去，而函數 $f(z)$ 在 Q_n 點的元素也如前未動。由此不難知道，一般，若固定端點 P_1 和 Q_n 可以將曲線連續變形，並且在 P_1 點的始元素沿變形過程中任一中間路線的解析延拓常為可能，則最後所得在 Q_n 點的終元素常為一定，不論解析延拓所沿的路線為何。

設由 P_1 點沿曲線 l 做解析延拓時我們祇能到某點 C 為止，而從這點沿曲線再做進一步的解析延拓便不可能，則 C 點稱為函數的奇

異點。祇是有一件重要的事情要注意，即有時解析延拓不能從 P_1 點沿曲線 l 做到 C 點，但沿另一曲線 l_1 卻可以做到 C 點，則 C 點可能並不是奇異點。就是說，一般而論，奇異點不但要由他自己在平面上的位置，並且還要看做解析延拓時到達這點所經過的路線如何來決定(參看[19]之例)。以後我們所要遇到的往往是比較簡單的情形，即奇異點的位置可以預先固定，而和解析延拓所經的線路無關。

和上面這些事實有直接關係的是解析延拓理論中的一個重要的定理，稱爲單值定理：若函數的某一始元素沿單通區域 B 中任一路線的解析延拓皆爲可能，則沿 B 中諸路線的解析延拓全體在 B 中決定一個單值函數。

事實上，設函數的始元素是在一點 P_1 的鄰域中所定義。取從 P_1 到 Q_n 的兩條不同解析延拓的路線 l_1 和 l_2。由區域的單通性，可藉連續變形將路線 l_1 變爲 l_2 而不越出區域 B 之外。由假設，沿這變形過程中任一中間路線的解析延拓常爲可能。因此，如我們前面已知，最後在 Q_n 點所得的終元素常相同，即由不同的解析延拓道路得到相同的結果。因此我們就得到一個單值函數 $f(z)$。

在以上的論斷中，我們有時祇作簡單的指示，而沒有深入到詳細的證明，因爲那會需要很多的篇幅才行的。不過我們仍希望讀者自己能對解析延拓的基本概念多多體會。要注意，以上所說的都祇是些空洞的理論，並沒有對解析延拓的實際可能性作任何指示。

函數論中還有一個和解析延拓有密切關係的原理，我們在這裏要提到的，即通常所謂不變原理。設解析函數 $f_1(z)$ 的始元素滿足一個方程，例如，二階微分方程：

$$p_0(z)\frac{d^2f(z)}{dz^2}+p_1(z)\frac{df(z)}{dz}+p_2(z)f(z)=0, \tag{94}$$

其中係數 $p_k(z)$ 爲 z 的已知多項式。當 $f_1(z)$ 被解析延拓時，導數 $f_1'(z)$ 和 $f_1''(z)$，因而上式左邊全部也經歷着一個解析延拓。因此，假如上式左邊在始區域中等於零，則經邊解析延拓以後必仍等於零。換句話說，若解析函數的始元素滿足方程(94)，則由始元素經過解析延拓以後所得的任一解析函數也必定滿足這方程。

現在來看一個具體的解析延拓的方法，即祇用到圓形區域和在這種區域中的泰勒展開式的解析延拓(圖 15)。設函數的始元素是一個以 b_1 爲中心的泰勒級數：

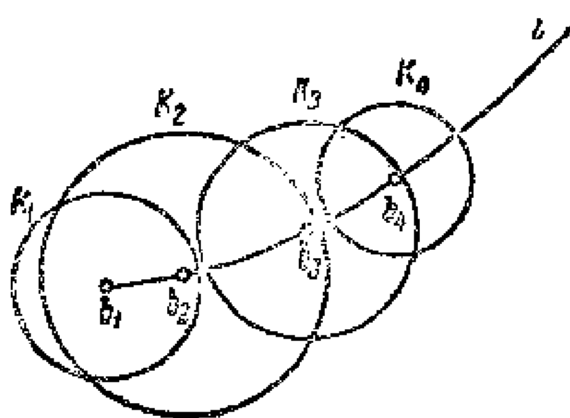


圖 15

$$(95)\quad f_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(1)}(z-b_1)^k。$$

從 b_1 點引一線路 l，現在要把這函數沿 l 解析延拓出去。爲這目的，可以照下法去做：在曲線 l 上取一點 b_2，使 b_1b_2 弧全部在級數(95)的收斂圓 K_1 之內。我們可以應用這級數計算諸導數 $f_1^{(n)}(b_2)$，然後寫出函數以 b_2 爲中心的展開式：

$$(96)\qquad f_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(2)}(z-b_2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_2^{(k)}(b_2)}{k!}(z-b_2)^k。$$

這個新得到的函數可在以 b_2 爲中心的某一圓 K_2 中有定義。若這圓越出圓 K_1 之外，則由函數(96)就可得到 $f_1(z)$ 的解析延拓。在 b_2 這點函數 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 以及他們的各階導數都互相全同，因此 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 就在兩圓相疊的月形區域中全同。注意，我們也可以用下面的方法從級數(95)得出級數(96)。將級數(95)改寫爲：

$$(97)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(1)}[(z-b_2)+(b_2-b_1)]^k。$$

用牛頓二項式公式展開 $[(z-b_2)+(b_2-b_1)]^k$，然後在級數(97)中將含$(z-b_2)$冪次相同的項加在一起，就可得到級數(96)。

完成第一次解析延拓以後，再來做第二次。爲此，在曲線 l 上另取一點 b_3，使 b_2b_3 弧全部在圓 K_2 之內。如前可將級數(96)改依 $(z-b_3)$ 的冪寫成級數，即得函數的另一元素

$$f_3(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(3)}(z-b_3)^k,$$

在某一以 b_3 爲中心的圓中有定義，等等。舉一個簡單的例子，看級數

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots \tag{98}$$

他祇在圓 $|z|<1$ 中收斂且定義一正則函數。但他的和 $\frac{1}{1-z}$ 顯然是全平面上的正則函數，除了在 $z=1$ 以外，因此我們一定可以把級數(98)延拓到全平面去。設在圓 $|z|<1$ 內取一點 b_2，同時將級數(98)改依$(z-b_2)$的冪寫成級數，即得：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-b_2)^{k+1}}(z-b_2)^k。$$

這級數收斂於一個圓中，這個圓以 b_2 爲中心，半徑等於 b_2 到點 $z=1$ 的距離。如果 b_2 不在實軸上的線段(0, 1)之上，這圓必定越出 $|z|<1$ 之外，而我們就可得到解析延拓，由這出發我們以後又可以做第二次的延拓。就實用上來說，像現在的情形，當然不必由級數(98)去做解析延拓，祇須逕用函數的最後表示 $\frac{1}{1-z}$ 就是了。但若所給的函數祇是一個冪級數，而其他的表示法卻一無所知，那末我們就非靠解析延拓不可了。在這方面有許多工作都是致力於如何纔能比較簡單地實際去履行解析延拓的問題的。以後我們要在一個特殊情形講一講這種實用的方法。現在我們且以初等多值函數爲例來說明解析延拓。

19. 多值函數的例子 試看函數

$$z=w^2, \tag{99}$$

並設變數 w 祇變動於上半平面之中，卽平面上虛數部分為正的點的全體(實軸以上的部分)，則幅角 $\arg w$ 就在 0 和 π 之間變動。將 w 平方，則模 $|w|$ 也得平方，而幅角便增大一倍，因此 z 的數值就充滿了全平面。這時 w 平面上的正實軸和負實軸都變為 z 平面上的正實軸。這樣，我們見到變換(99)的結果是把 w 平面的上半部變為 z 平面的全部，除了一條從原點 O 沿實軸到 $+\infty$ 的割線以外。這種帶有割線的平面記為 T_1。反過來我們可以將 w 看作平面 T_1 上的 z 的單值函數：

$$w=\sqrt{z}, \tag{100}$$

這裏應該取虛數部分為正的那個平方根 $\sqrt{z}$ 做 w 的數值。z 的正實數值可在割線的上岸找到，同時也可在割線的下岸找到。但在上岸 $\sqrt{z}$ 應該取正值，而在下岸 $\sqrt{z}$ 則應取負值。比率 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 的極限顯然等於比率 $\frac{\Delta z}{\Delta w}$ 的極限的倒數，卽通常反函數的微分規則也成立，又函數(100)在平面 T_1 中為正則。

$$\frac{dz}{dw}=2w; \quad \frac{dw}{dz}=\frac{1}{2\sqrt{z}}. \tag{101}$$

回到(99)式，假設現在 w 變動於下半平面之中。平方以後易見所得 z 的全體還是前面那個 T_1 的另一模型，設以 T_2 記之。函數(100)在 T_2 中仍為單值，但這時應取虛數部分為負的 $\sqrt{z}$ 的值做 w 的值。

由以上的論斷立刻可知函數(100)在平面 T_1 中割線上岸的數值和他在平面 T_2 中割線下岸的數值符合，反過來也是一樣。

故知函數(100)在從 0 到 $+\infty$ 畫了割線以後的平面上為單值。但如欲得到函數值的全部，就必須把他看成兩個不同的函數，分別在平面

T_1 和 T_2 上依照前面所說的辦法定義起來。將函數(100)如此分裂為兩個獨立的單值函數不過是一種技巧，現在我們再把這兩個函數結合起來使之成為一個在一雙葉平面上為正則單值的解析函數。要做這雙葉平面 T，可以將 T_1 放在 T_2 之上，再想像把這兩平面沿着割線的兩岸交叉地相接起來，就是 T_1 中割線的上岸和 T_2 中割線的下岸相接，T_1 中割線的下岸和 T_2 中割線的上岸相接。兩平面上的 $z=0$ 假定合而為一點。這種雙葉區域 T 顯然係由 w 平面藉變換(99)而得，函數(100)在整個區域 T 中為單值正則，除了 $z=0$ 這點以外。注意 $z=0$ 的奇異性質是：若從任一點 z_0 出發繞着 $z=0$ 走一閉線路，則回到 z_0 時我們發現終點 z_0 所在的一葉已經不是起點 z_0 所在的那一葉了。這時，前面所定義的函數 $\sqrt{z}$ 在閉線路上的數值顯然給了這函數沿着閉線路的一個解析延拓，並且函數在 z_0 的終值和始值只差一個符號。故知函數 $\sqrt{z}$ 在 $z=0$ 的鄰域中為連續且有導數，但當沿着環繞這點的閉線路做解析延拓後，函數值常變其號。這種點通常稱為函數的支點。在我們的情形，如果繞着 $z=0$ 再走一週的話，函數就回到原值。這種支點稱為一階支點。區域 T 顯然已代表函數(100)的值的全部。我們現在之所以能夠很容易地得到區域 T 乃是因為函數(100)是很簡單的函數(99)的反函數之故。(圖 16)中所示是雙葉平面在其一階支點鄰近的圖形。

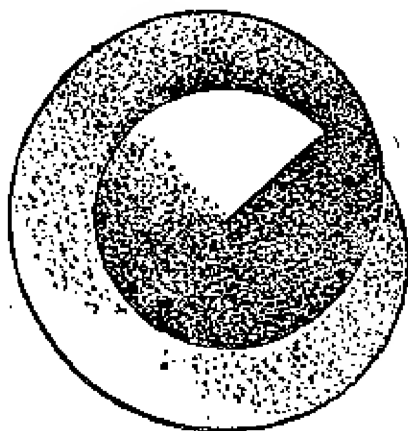


圖 16

一般，若函數

$$z=\varphi(w) \tag{102}$$

在全 w 平面上為正則單值，他可能將 w 平面變為一多葉 z 平面，而其反函数

(103) $$w=f(z)$$

則在這多葉平面上爲正則,並且有導數

$$f'(z)=\frac{1}{\varphi'(w)}。$$

祇在對應於 $\varphi'(w)$ 的零點的諸點 z, $f'(z)$ 喪失其正則性。在以後有一節裏面我們要詳細證明這些點 z 剛好都是反函數 (103) 的支點。前面所說的多葉平面通常稱爲黎曼曲面(黎曼是十九世紀中葉德國數學家)。再考察下面的例子

(104) $$f(z)=\frac{1}{\sqrt{z}+2}。$$

這函數的多值性祇是由其中的 $\sqrt{z}$ 而來,所以知道他在我們以前爲函數(100)而作的雙葉平面 T 上是單值的。他以 $z=0$ 爲奇異點(支點),有一個 $z=4$ 的點也是他的奇異點。這種 $z=4$ 的點有兩個(在兩葉 T_1 和 T_2 之上),在其中一葉上 $\sqrt{4}=+2$, 而在另一葉上 $\sqrt{4}=-2$。後面這個 $z=4$ 才是函數(104)的極點。假如我們不用雙葉平面 T, 則當做(104)的解析延拓時就可以在同一點得到這函數的不同的值,特別,對於那些解析延拓的道路使得當 $z=4$ 時 $\sqrt{z}=-2$ 的, $z=4$ 就是函數的奇異點。

函數(104)可以看做下一函數的逆函數

(104_1) $$z=\frac{(2w-1)^2}{w^2}$$

他在全平面上爲正則,除了在 $w=0$ 以外。$w=0$ 這點是他的二階極點,且可證明這函數將 w 平面變爲前面講過的雙葉平面 T。在現在的情形, $w=\frac{1}{2}$ 的像是支點 $z=0$; $w=0$ 的像是 $z=\infty$。$w=\infty$ 的像是 T 中一葉上的 $z=4$ 點。另一葉上的 $z=4$ 是 $w=\frac{1}{4}$ 的像。注意:在上述的

雙葉平面中我們不但假設兩個 $z=0$ 合而爲一，並且兩個 $z=\infty$ 也要合而爲一，即 $z=\infty$ 和 $z=0$ 都是一階支點。在(99)式中祇有當 $w=0$ 時可以得到 $z=0$，而在(104_1)式中祇有當 $w=\frac{1}{2}$ 時 $z=0$。同樣，$z=\infty$ 這點祇有在(99)式中令 $w=\infty$，或在(104_1)式中令 $w=0$ 纔能得到。

再看函數：

$$w=f(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}。\tag{105}$$

這函數的支點是 a 和 b。沿着環繞 a 或 b 中任一點的閉線路走一圈時，函數(105)的值變一符號，但若同時繞着兩點走一圈，則函數(105)的值不變。事實上，設：

$$z-a=\rho_1e^{i\varphi_1};\quad z-b=\rho_2e^{i\varphi_2},$$

則

$$f(z)=\sqrt{\rho_1\rho_2}\,e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}。$$

如果 l 是環繞 a 和 b 兩點的閉線路，則沿 l 逆時針方向走一周時，幅角 φ_1 和 φ_2 各增加 2π，其和($\varphi_1+\varphi_2$)的增量就是 4π，因而(105)式中函數的幅角就得到增量 2π，卽函數的值不變。要使函數(105)成爲單值，祇須從 a 到 b 鑿一條割線。這種割線可以避免形成任何將 a 和 b 隔開的環路。函數(105)在 z 平面上任一點，除 $z=a$ 和 $z=b$ 以外，都有兩個數值，要得到函數值的全部，我們必須取具有上述割線的平面的兩個模型。在每一個上面(105)是個單值函數，且對不同模型上的同一點 z，這函數的兩個數值祇相差一符號。若將一模型放在另一之上，並想像他們沿着割線的兩岸交叉地相接起來，那末就得到一個雙葉黎曼曲面，以 a 和 b 爲一階支點，函數(105)在其上爲單值正則(除支點外)。無限遠點並非支點，且每一葉有他自己的無限遠點。在這無限遠點的鄰近，函數(105)可改寫爲：

$$f(z)=\pm z\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{b}{z}\right)^{\frac{1}{2}}。$$

上式右邊後面兩因子可用牛頓二項式公式展開，因爲在無限遠點的鄰域中$\left|\frac{a}{z}\right|$和$\left|\frac{b}{z}\right|$都可使小於 1，這樣我們就得到函數在無限遠點鄰域中的展開式：

$$f(z)=\pm z\left(1-\frac{1}{2}\frac{a}{z}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{a^2}{z^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{a^3}{z^3}-\cdots\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{2}\frac{b}{z}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{b^2}{z^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{b^3}{z^3}-\cdots\right)。$$

將兩級數乘開可知每一葉上的無限遠點都是函數的一階極點。

注意：由方程(105)解 z，我們就得到 w 的一個多值函數，所以函數(105)並非全平面上的單值函數的反函數。他在其上爲單值的黎曼曲面有兩個一階支點 $z=a$ 和 $z=b$ 。這黎曼曲面也可由 w 平面藉變換

$$z=\frac{bw^2-a}{w^2-1}$$

而得，因這函數的反函數 $w=\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$

有和函數(105)一樣的黎曼曲面。

再看函數

$$f(z)=\sqrt[n]{z-a}\,, \tag{106}$$

其中 n 是個正整數。對這函數，任一繞 $z=a$ 的環路必定變更他的數值，祇有繞着 $z=a$ 沿同一方向走 n 圈以後，函數才能回到他在出發點的數值，即 a 點是函數(106)的 $n-1$ 階支點。實際上，以 ρ 和 φ 記 $z-a$ 的模和輻角，即得：

$$\sqrt[n]{z-a}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi}{n}}。$$

繞着 $z=a$ 沿正方向走 n 圈以後，輻角 φ 增加了 $2n\pi$，因此$\sqrt[n]{z-a}$

的幅角所得到的增量爲 2π，故函數值不變。

現在再看函數論中另一重要的多值函數，即對數函數。這函數係由指數函數

$$z=e^{w} \tag{107}$$

反演而得。

首先要說明指數函數的幾點性質。不難知道這函數有一純虛數週期 $2\pi i$。事實上，

$$e^{w+2\pi i}=e^{w}e^{2\pi i}=e^{w}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^{w}。$$

將整個 $w=u+iv$ 平面分爲許多平行於實軸，寬度爲 2π 的帶域（圖 17 a）。第一條帶域可以取 w 平面上在 $v=0$ 和 $v=2\pi$ 兩直線間的部分，記之爲 U。要把這個基本帶域 U 移到任一其他帶域的位置時，

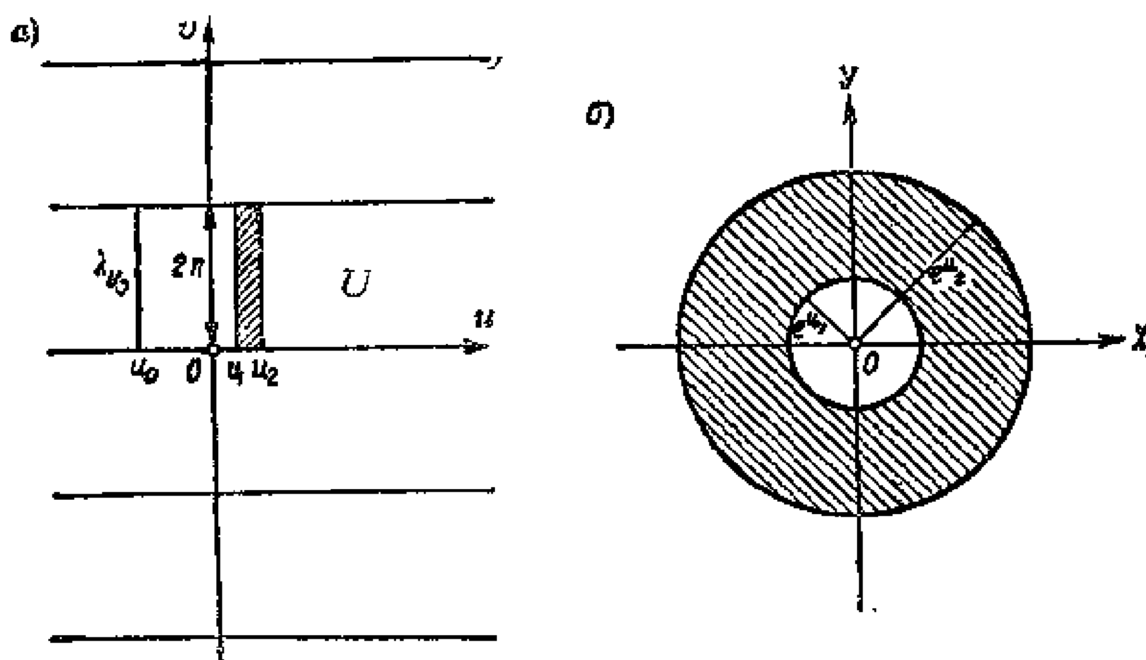


圖 17

祇須在 w 上加一項 $2n\pi i$ 就行了，這裏 n 是一個適當的整數。由前述的週期性可知函數(107)的值並不因此而變，即函數在每一帶域中的數值都和他在 U 中的數值一樣。現在試看函數(107)把基本帶域 U 變

成什麽。在 U 中畫一直線段 λ_{u_0} 平行於虛軸而橫坐標 $u=u_0$。沿這直線段有：

$$u=u_0 \qquad (0\leqslant v\leqslant 2\pi)$$

因此
$$e^{w}=e^{u_0}e^{iv} \qquad (0\leqslant v\leqslant 2\pi)$$

即這直線段的像是一個以原點爲中心，半徑等於 e^{u_0} 的圓周，並且 λ_{u_0} 的兩個端點的像合於圓周上同一點。對 U 中兩條平行於 $u=0$，橫坐標爲 $u=u_1$ 和 u_2 的直線段之間的部分，我們藉變換(107)就在 z 平面上得到一個圓環，以原點爲中心，半徑分別爲 e^{u_1} 和 e^{u_2}（圖 17 б）。因此整個帶域 U 經過(107)的變換後就成爲整個 z 平面除了原點。帶域的上境界線和下境界線都變成 z 平面上的正實軸。若從原點沿正實軸到 ∞ 畫一條割線，那末我們可以知道，這割線的上岸對應於帶域的下境界線，而他的下岸就對應於帶域的上境界線。以 T_1 表示除去原點和這割線以後的 z 平面，則函數(107)的反函數

(108)
$$w=\lg z$$

就在區域 T_1 中爲單值正則，並且他的導數可由通常反函數的微分規則求出爲：

(109)
$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{(e^{w})'}=\frac{1}{e^{w}}=\frac{1}{z}。$$

我們已知：$\qquad \lg z=\lg|z|+i\arg z$。

當這函數沿一條閉線路做解析延拓時，我們應該注意的是輻角 $\arg z$ 的連續變化。

在前述區域 T_1 中，輻角的變化受到 $0\leqslant \arg z\leqslant 2\pi$ 的限制，所以(108)才會是單值函數。這裏 $z=0$ 顯然是函數(108)的支點，即沿着任一環繞原點的閉線路逆時針方向地走 n 圈以後的解析延拓使函數值增加 $2n\pi i$，走的圈數不同時，所得之函數值當然也就不同。因此，現在

$z=0$ 是個無限階支點了。

回過來看 w 平面經過變換(107)後成為什麼。w 平面上每一帶域經變換(107)後即得 z 平面上區域 T_1 的一個新的模型，這種模型當然有無數個之多。把他們一個個疊起來，然後排成次序。和基本帶域 U 對應的那個模型記為 T_1，和緊接在 U 之上的帶域對應的記為 T_2，依此類推。又和在 U 之下的那些帶域對應的模型依次記為 T_0，T_{-1}，T_{-2}，…。現在再想像把他們沿着割線的兩岸依下法相接起來：T_1 的割線的上岸和 T_0 中的下岸相接，T_1 的割線的下岸和 T_2 中的上岸相接；然後將 T_0 的割線的上岸和 T_{-1} 中的下岸相接，T_2 的割線的下岸和 T_3 中的上岸相接，依此類推。這樣我們就得到一個無數多葉的黎曼曲面，以 $z=0$ 和 $z=\infty$ 為無限階支點。在這黎曼曲面 T 上函數(108)為單值正則。這曲面 T 就是 w 平面經過變換(107)所得到的。

函數 $w=\lg(z-a)$ 顯然以 $z=a$ 和 $z=\infty$ 為無限階支點。再看函數

(110) $$w=\lg\frac{z-a}{z-b}=\lg(z-a)-\lg(z-b)。$$

他以 $z=a$ 和 $z=b$ 為支點。若環繞 a 和 b 兩點沿正方向走一閉線路，則上式右邊增減各為 $2\pi i$，彼此相消，而 w 的值不變。因此無限遠點不是函數(110)的支點。

我們可以把這函數改寫為：

$$w=\lg\left(1-\frac{a}{z}\right)-\lg\left(1-\frac{b}{z}\right),$$

並且對所有使 $|z|$ 大於 $|a|$ 和 $|b|$ 的 z，上式右邊兩項可依(80)式展開。這樣我們就得到函數在無限遠點鄰近的展開式：

(111) $$w=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{z^k},$$

其中 $$\alpha_k=\frac{b^k-a^k}{k}。$$

(111)式定義多值函數(110)在無限遠點鄰域中的一個支頁。如果要得到其他的支頁,祇須在上面的展開式中再加一項 $2n\pi i$ 卽可。對任一固定的整數 n,我們都可以得到函數的一個新的支頁。

再看函數

$$w=\operatorname{arc}\operatorname{tg} z=\frac{1}{2i}\lg\frac{i-z}{i+z},$$

他以 $z=i$ 和 $z=-i$ 爲無限階支點。要求這函數的導數,可照實變數的情形一樣去做,卽得:

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{1+z^2}$$

或

$$\frac{dw}{dz}=-\frac{1}{(i+z)(i-z)}。$$

20. 解析函數的奇異點和黎曼曲面 在上一節裏面,我們看過一些多值函數的例子,並且做出他們對應的黎曼曲面,在這種曲面上函數變爲單值。現在轉過來研究這問題的一般情形。爲了篇幅關係,我們祇在這裏講些一般的指示,而不準備深入詳論了。首先來說明解析延拓的孤立奇異點這個概念。

設在 $z=a$ 點已給解析函數 $f(z)$ 的一個始元素,並且把他沿曲線 l 延拓出去。假設解析延拓做到 $z=b$ 點便不能再向前進,則對於沿曲線 l 的解析延拓,b 點就是一個奇異點[18]。如果存在一個以 b 爲中心的圓 K,曲線 l 在 K 之內的部分爲 cb(圖18),使對應於 cb 上任一點,函數 $f(z)$ 的元素必可沿任一 K 內的曲線做解析延拓,祇要這曲線不經過 $z=b$ 點。這時,$z=b$ 點就稱爲 $f(z)$ 的孤

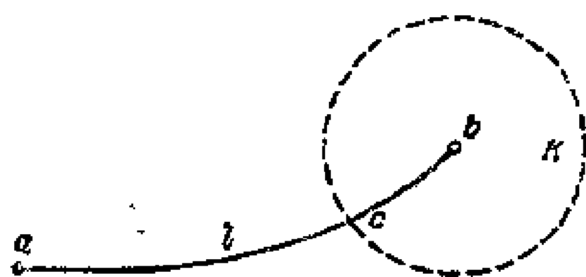


圖 18

立奇異點(對應於線路 l)。上述在 K 之內所有可能的解析延拓的結果決定 K 中一個函數,可爲單值,亦可爲多值。在第一種情形,這單值函數在 K 內處處爲正則,除了在 b 點外。因此可以依 $(z-b)$ 的整冪展開爲羅朗級數,而 $z=b$ 點或者是解析函數 $f(z)$ 的極點,或者是他的本性奇異點(對於沿 l 的解析延拓)。在第二種情形,因爲所得 K 內的函數的多值性,b 點稱爲函數的支點。若經 K 內所有可能的解析延拓以後,在 K 中一點 $z=\alpha$ 我們得到函數的有限個不同元素,設爲 m 個。則易知在 K 中任一旁的點 $z=\beta$,我們同樣也得到 m 個不同元素,這是因爲從 α 到 β 或從 β 到 α 沿同一線路做解析延拓時,若始元素不同,所得到的終元素也不同的緣故。這時 b 點稱爲 $(m-1)$ 階支點。若經過 K 內的解析延拓以後得到無數個不同的元素,則 b 點稱爲無限階支點。

再詳細觀察一下 $(m-1)$ 階支點的情形。由假設,K 內的解析延拓除在 b 點外處處可行。這種除了一點 b 以外的圓 K 是個雙通區域。取這種圓 K 的 m 個模型,在每一模型中從 b 點沿同一半徑畫一條割線。畫了割線以後的圓 K_1 是個單通區域。在每一 K_1 的模型中取出同一點 $z=a$,解析函數在這點有 m 個元素。在每一模型中的 a 點取這函數的一個固定元素,再做他在 K_1 中的解析延拓。由單值定理[18],我們在每一模型中得到一定的單值函數。現在對每一模型中的割線,可以設法固定其兩岸的名稱。例如,若從割線的一岸可以在 K_1 中逆時針方向繞着 b 點移動而到達割線的另一岸,則前者稱爲右岸,後者稱爲左岸。取任一 K_1 的模型爲第一個模型,而在他上面定義的單值函數記爲 $f_1(z)$。$f_1(z)$ 在割線左岸的數值必定和 K_1 的另一模型中的單值函數在割線右岸的數值全同。取這爲第二個模型,而記其上的單值函數爲 $f_2(z)$。想像把第一模型中割線的左岸和第二模型中割線的右岸相接起來。$f_2(z)$ 在第二模型中割線左岸上的數值又和另一 K_1 的模型中的單

值函數在割線右岸上的數值全同。取這爲第三個模型,而記其上的單值函數爲 $f_3(z)$。想像把第二個模型中割線的左岸和第三個模型中割線的右岸相接起來。照這樣做去,最後到了第 m 個模型。不難知道 $f_m(z)$ 在第 m 個模型中割線左岸的數值應該和 $f_1(z)$ 在第一個模型中割線右岸的數值全同。想像把這兩岸相接起來。這樣我們就得到一個 m 葉的圓 L,以 $z=b$ 做 $(m-1)$ 階支點。這裏所有 m 個模型上的 b 點假定都合而爲一。在這 m 葉圓上,函數 $f(z)$ 是處處單值正則,除了 $z=b$ 以外。現在用一個新的自變數 z' 代替 z,

$$z'=\sqrt[m]{z-b}=\sqrt[m]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi}{m}}, \tag{112}$$

其中 $\rho=|z-b|$, $\varphi=\arg(z-b)$,對 L 中任一點 φ 可藉一定的方法固定之。$z=b$ 的像是 $z'=0$,在 L 中繞 $z=b$ 點走一圈以後,幅角的變化是 $2m\pi$,而繞 $z'=0$ 走一圈後幅角的變化是 2π。圓 L 有 m 葉,而他在 z' 平面上的像祇是一個以 $z'=0$ 爲中心的單葉圓 C,其半徑爲 $\sqrt[m]{R}$,這裏 R 是 L 的半徑。在這單葉圓 C 中函數爲單值正則,可能除 $z'=0$ 這點以外。因此他在 C 內可展開爲羅朗級數:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z'^n$$

或回到從前的變數 z:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(\sqrt[m]{z-b})^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-b)^{\frac{n}{m}}, \tag{113}$$

即在 $(m-1)$ 階支點的鄰域中函數可依 (112) 中變數 z' 的整冪展開。對於 b 的鄰域中任一點 z, z' 的數值可任意的,但藉一定的方法固定之。展開式 (113) 可以呈現許多不同的情形。有時展開式中可以不含 $(z-b)$ 的負冪的項:

$$f(z)=a_0+a_1\sqrt[m]{z-b}+a_2(\sqrt[m]{z-b})^2+\cdots,$$

而且顯然當 $z\to b$ 時 $f(z)\to a_0$。但 z 可用任何方式趨向 b,祇要不越

出 L 之外。這時置 $f(b)=a_0$，且稱 $z=b$ 為正則型支點。若展開式(113)中祇有有限個含負冪的項，則當 $z\to b$ 時 $f(z)\to\infty$。這時置 $f(b)=\infty$，且稱 $z=b$ 為極型支點。若展開式(113)中有無限個含負冪的項，則稱 $z=b$ 為本性奇異型支點。

所有以上的定義都可以轉用於無限遠點。設沿線路 l 做 $f(z)$ 的解析延拓後，存在一個無限遠點的鄰域 $K(|z|>R)$（圖 19），使得凡是對應於 K 內 l 上的點的 $f(z)$ 的元素都可以沿 K 內任一線路解析延拓開去。如果解析延拓的結果得到一個單值函數，則 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的正則點，極點或本性奇異點[10]。如果得到的是多值函數，則 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的支點。假設這支點的階數是個有限數 $(m-1)$，則在其鄰域有如下之展開式成立：

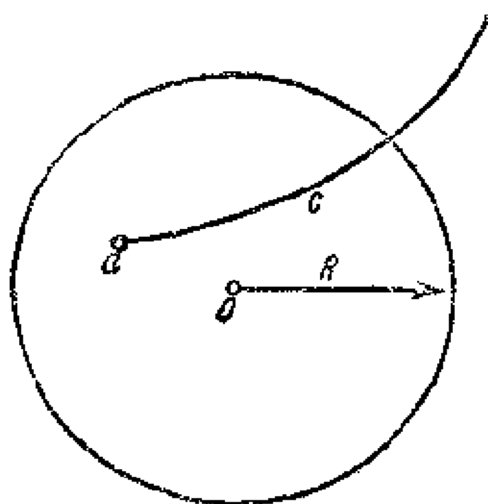


圖 19

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\left(\frac{1}{\sqrt[m]{z}}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^{-\frac{n}{m}},$$

而以前對展開式(113)所說過的那些話現在又可以照樣重說一遍。當然，$z=\infty$ 的性質和到達其鄰域中的解析延拓的道路 l 有關。

現在再說明"多值解析函數 $f(z)$ 的黎曼曲面"的基本意義。假設由某一始元素出發的解析延拓已到達一點 $z=\alpha$。函數在這點的元素即其依 $(z-\alpha)$ 的正整數冪展開的冪級數。若 β 為 α 的鄰域中任意一點，這級數也可以改依 $(z-\beta)$ 的正整數冪寫成冪級數，即由函數在 α 點的元素可以得到他在所有和 α 相當接近之點的元素。我們把每一個這樣的元素對照一個點 z，這個點就是這冪級數(元素)的對應的收斂圓的中

心。上述的以 $z=\alpha$ 爲中心的元素就對照着點 α。由這元素得到的在鄰近的點 $z=\beta$ 的那些元素就對照着屬於 $z=\alpha$ 的鄰域的那些點 $z=\beta$，亦卽與 $z=\alpha$ 位於同一葉上的點。這樣，完成解析延拓，我們得到了函數的所有的一批一批的新元素以及黎曼曲面上所有的一批一批的點。當解析延拓回到 $z=\alpha$ 時，如果所得到的元素和以前的一樣，則認這 α 點和以前的 α 點全同；如果所得到的元素和以前的不同，則認這 α 點和以前的 α 點不同(認爲他處在另一葉上面)。就是說，如果兩點的複坐標同爲 z，但是解析函數在這兩點的元素不相同，我們就應當把他們看作不同的點，認爲他們處於不同的兩葉上。如此，用解析延拓就可造成對應於所給的解析函數的黎曼曲面。在這曲面上 $f(z)$ 爲單值正則。對黎曼曲面我們通常都要把 $f(z)$ 的極點，正則型和極型的有限階支點算進在內。注意：一般說來，黎曼曲面並不能從 w 平面藉變換 $z=\varphi(w)$ 而得，這裏 $\varphi(w)$ 是 w 平面上的單值正則函數(可能有極點)，好像[19]中那些最簡單的例子一樣。

以上所說的祇是孤立奇異點的情形。有時這種解析延拓的奇異點可以充滿了某一曲線的全部。例如有時一個由冪級數決定的始元素不能沿任何道路延拓開去，卽這冪級數的收斂圓的圓周上每一點都是奇異點。下面就是一個這種級數的例子：

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}=z+z^{1\cdot 2}+z^{1\cdot 2\cdot 3}+z^{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots=z+z^2+z^6+z^{24}+\cdots。$$

21. 留數定理 再回頭來看函數在奇異點(極點或本性奇異點)鄰近的羅朗展開式。在這種展開式中我們特別提出 $(z-b)^{-1}$ 的係數來，並且給他一個特別名稱，叫做函數在這奇異點的留數。現在要說明這個係數的重要性。設在 b 點的鄰域中函數的展開式爲：

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-b)^k。$$

設 l_0 爲任一環繞 b 點的很小的閉線路，這展開式在 l_0 上一致收斂。將上式兩邊沿 l_0 積分，得

$$\int_{l_0} f(z)dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{l_0} (z-b)^k dz\text{。}$$

在[6]中已知上式右邊只有對應於 $k=-1$ 的積分等於 $2\pi i$，而其他的積分都等於零，故：

$$\int_{l_0} f(z)dz = a_{-1}\cdot 2\pi i\text{。}$$

現在看更一般的情形。設 $f(z)$ 在一以 l 爲境界線的閉區域 B 中爲正則，除了有限個 B 的內點 $b_1, \cdots, b_m$ 以外，這些點是函數的極點或本性奇異點。函數在這些奇異點的留數記爲 $a_{-1}^{(s)}(s=1, 2, \cdots, m)$。對每一奇異點用一個很小的閉線路 l_s 把他從 B 中除外。由勾犀定理有：

$$\int_{l} f(z)dz = \sum_{s=1}^{m} \int_{l_s} f(z)dz\text{。}$$

但我們前面已經知道，沿每一線路 l_s 的積分數值等於 $a_{-1}^{(s)}\cdot 2\pi i$，因此由上式可知函數沿區域境界線的積分數值可以用他在區域內部諸奇異點的留數來表示：

$$\int_{l} f(z)dz = 2\pi i \sum_{s=1}^{m} a_{-1}^{(s)}\text{。} \tag{114}$$

留數定理，　若函數在閉區域中爲正則，除了有限個區域的內點以外(極點或本性奇異點)，則函數沿這區域境界線的積分等於以 $2\pi i$ 乘函數在這些奇異點的留數的和。

這定理在以後有許多應用。現在我們祇講一些他在理論上的推論，因爲後來需要用到他們。首先給幾個實用的計算留數的方法，不必用到函數的羅朗展開式。

第一個例子。設函數的形式爲：

(115) $$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

其中 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在 b 點爲正則,而 $\psi(b)=0$ 。因此,一般而論,函數(115)以 b 爲極點。再設 $z=b$ 爲 $\psi(z)$ 的單零點,即 $\psi(z)$ 的泰勒展開式始於 $(z-b)$ 的一次項:

$$\psi(z)=c_1(z-b)+c_2(z-b)^2+\cdots \qquad (c_1\neq 0)$$

這時函數(115)就以 b 爲單極點(一階極點),在 $z=b$ 的鄰近有:

$$f(z)=\frac{\varphi(b)+\frac{\varphi'(b)}{1!}(z-b)+\cdots}{(z-b)[c_1+c_2(z-b)+\cdots]}。$$

由上式可知對留數 a_{-1} 有:

$$a_{-1}=f(z)(z-b)\Big|_{z=b}=\frac{\varphi(b)}{c_1},$$

或由 $c_1=\psi'(b)$:

(116) $$a_{-1}=\frac{\varphi(b)}{\psi'(b)}。$$

第二個例子。設函數 $f(z)$ 以 b 爲 m 階極點:

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}a_k(z-b)^k,$$

則乘積 $f(z)(z-b)^m$ 在 b 點爲正則,且在其中 a_{-1} 是 $(z-b)^{m-1}$ 的係數。由泰勒級數中係數的表示法知道 $f(z)$ 的留數可表示如下:

(117) $$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[f(z)(z-b)^m]\Big|_{z=b}。$$

再看一個例子。設 $f(z)$ 以 b 爲 m 重零點,即以 b 爲中心的函數的泰勒級數始於 $(z-b)$ 的 m 次項。這時函數在 b 點的鄰近可表示爲:

(118) $$f(z)=(z-b)^m\varphi(z), \qquad [\varphi(b)\neq 0]$$

其中 $\varphi(z)$ 在 b 點爲正則且不等於零。作函數的對數導數:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-b}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}。\tag{119}$$

由此立刻可知對數導數以 b 點爲單極點，其留數等於函數 $f(z)$ 以 b 爲零點的重數。若 b 不是 $f(z)$ 的零點，而是他的 m 階極點，同樣可得(118)式，但 m 改爲 $(-m)$。所有以後的計算一律不變。故若函數以某點爲 n 階極點，則其對數導數以該點爲單極點，留數爲 $(-n)$。

22. 關於零點的個數的定理 設 $f(z)$ 在以 l 爲境界線的閉區域 B 中爲正則，且在 l 上不等於零。設 B 的內點 $b_1,\cdots,b_m$ 是函數的 $k_1,\cdots,k_m$ 重零點，那末他的對數導數就以諸點 b_i 爲單極點，且有留數 k_i，由留數定理有：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=k_1+k_2+\cdots+k_m。\tag{120}$$

若每一 m 重零點算做 m 個零點，上式右邊就表示函數 $f(z)$ 在區域內部的零點的個數，卽由已給關於函數 $f(z)$ 的假設，上式左邊的積分表示 $f(z)$ 在閉曲線 l 之內的零點的個數。

(120)式左邊被積函數的原函數顯爲 $\lg f(z)$，因此當 z 沿 l 走一週以後，這原函數所得的改變量卽積分的數值。這時我們應該取原函數的一個單值支頁來看，而由

$$\lg f(z)=\lg|f(z)|+i\arg f(z),$$

祇要看當 z 沿 l 走一週後 $f(z)$ 的輻角的連續變化就好了，因爲 $\lg|f(z)|$ 總是回到原值的。所以原函數的改變量就等於 i 乘以 $\arg f(z)$ 的改變量。由(120)式，還應該以 $2\pi i$ 去除原函數的改變量，而後可以得到下面的結果：

勾犀定理 若 $f(z)$ 在閉區域 B 中爲正則，在境界線 l 上不等於零，則函數在區域內部的零點的個數等於 z 沿 l 走一週後函數的輻角所得的改變量用 2π 來除，或者換句話說，用 2π 做單位時輻角的改變量的

數值。

對於多項式這定理顯然可知是對的。例如取一三次多項式，並且把他分解成三個一次項的積：

$$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3=a_3(z-b_1)(z-b_2)(z-b_3)。$$

設 b_1 和 b_2 兩個零點在閉曲線 l 之內，而另一零點 b_3 在 l 之外。每一差數 $(z-b_k)$ 對應於一個從 b_k 到 z 的向量。當 z 沿 l 走一週以後，向量 $(z-b_1)$ 和 $(z-b_2)$ 的幅角顯然都得到改變量 2π，而向量 $(z-b_3)$ 的幅角不變。因此函數的幅角得到改變量 4π（乘積的幅角等於諸因子的幅角的和），或以 2π 爲單位，這改變量就等於 2，卽函數在 l 之內的零點的個數。

再證明一個關於正則函數的零點的個數的定理，它是勾犀定理的直接推論。如前設 $f(z)$ 在閉區域中爲正則，而在境界線 l 上不等於零。又設函數 $\varphi(z)$ 在這閉區域中亦爲正則，在 l 上 $\varphi(z)$ 的模小於 $f(z)$ 的模，卽

$$|\varphi(z)|<|f(z)| \qquad \text{在 } l \text{ 上。} \tag{121}$$

注意：當這條件存在時，$f(z)$ 在 l 上顯然不能等於零。現在看兩函數：

$$f(z) \quad \text{和} \quad f(z)+\varphi(z)。 \tag{122}$$

他們都滿足勾犀定理的條件。$f(z)$ 由假設知道他滿足，而 $f(z)+\varphi(z)$ 由條件(121)知道他在 l 上也不等於零。現在證明這兩函數在 l 之內的零點的個數相同。爲此，可以看第二個函數在 l 上的幅角

$$\arg[f(z)+\varphi(z)]=\arg f(z)+\arg\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right],$$

因爲在 l 上 $f(z)\neq 0$。要證明我們的話，只需證明當 z 沿 l 走一週後，幅角

$$\arg\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right] \tag{123}$$

的變化等於零卽可。由條件(121)，在 l 上 $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ 的模常小於 1，因此當 z 沿 l 走一週時，變動點

$$z'=1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$$

常在以 $z'=1$ 爲中心，半徑爲 1 的圓 C 之內，他的軌跡是 C 內一條閉曲線，顯然不包含原點在其內。這樣，(123)中幅角的變化自然就等於零了。故得：

盧捨定理　若 $f(z)$ 和 $\varphi(z)$ 在以 l 爲境界線的閉區域中爲正則，並且在 l 上滿足條件(121)，則函數 $f(z)$ 和 $f(z)+\varphi(z)$ 在這區域的內部的零點的個數相同。

注意，由盧捨定理立刻可導出代數學的基本定理，卽任一 n 次多項式：

$$a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n \qquad (a_n\neq 0) \tag{124}$$

在 z 平面上有 n 個零點。事實上，設 $f(z)=a_nz^n$，$\varphi(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}$。在任一以原點爲中心，半徑相當大的圓周上，顯然有 $|\varphi(z)|<|f(z)|$，因爲多項式 $\varphi(z)$ 的次數低於多項式 $f(z)$ 的次數。由盧捨定理，多項式(124)與 $f(z)=a_nz^n$ 在這種圓內的零點的個數相同，而後者以 $z=0$ 爲 n 重零點，故證。

再講一個勾犀定理的推論，他在保角變換的理論中是非常重要的。設函數

$$w=f(z) \tag{125}$$

在閉區域中爲正則，當 z 沿境界線 l 走一週時，w 的軌跡是一條不自交的簡單閉曲線 l_1(圖 20)。可以證明在這條件之下，函數(125)把 l 的內域 B 變爲 l_1 的內域 B_1。在 l_1 之內取一點 w_1，l_1 之外取一點 w_2，我們祇要證明在區域 B 內函數

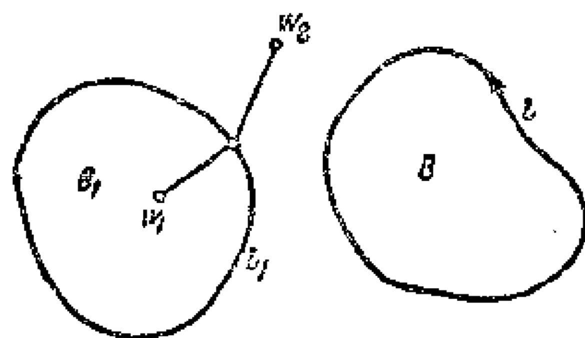


圖 20

$$F_1(z)=f(z)-w_1$$

有一個零點，而函數

$$F_2(z)=f(z)-w_2$$

沒有零點即可。當 z 在曲線 l 上時 $f(z)-w_1=w-w_1$ 對應於一個從 w_1 到 l_1 上一變動點 w 的向量。這時可以想到有兩種情形：即當 z 逆時針方向沿 l 走一週時 w 沿 l_1 走一週的方向或爲逆時針，或爲順時針。在第一種情形，函數 $F_1(z)$ 的幅角的變化顯爲 2π，因此這函數在 l 之內確有一個零點。在第二種情形，$F_1(z)$ 的幅角的變化爲一負數 (-2π)，因而 $F_1(z)$ 在 l 之內應該有 (-1) 個零點，這是不合理的，因爲零點的個數或爲零或爲正整數。這樣，第二種情形就不可能發生，所以當 z 點逆時針方向沿 l 走一週時，對應的 w 點也應該逆時針方向沿 l_1 走一週。現在再看函數 $F_2(z)$。他對應於一個從 w_2 到 l_1 上一變動點 w 的向量，當 w 沿 l_1 走一週後，$F_2(z)$ 的幅角沒有得到改變量，因此他在 l_1 之內沒有零點。這樣我們就得到下面的定理：若 $f(z)$ 在以 l 爲境界線的閉區域 B 中爲正則，並且將 l 變爲不自交的簡單閉曲線 l_1，則沿 l 進行的正方向也對應於沿 l_1 進行的正方向，並且 $f(z)$ 將區域 B 變爲 w 平面上 l_1 的內域。

我們得到勾畢定理時對於(120)式左邊的積分假定了 $f(z)$ 在閉區域中爲正則，在境界線 l 上不等於零。現在假定 $f(z)$ 在區域內部有有限個極點，而在其餘的部分爲正則，又在 l 上爲正則且不等於零。這時如我們所知，被積函數在區域內部有單極點，此極點是 $f(z)$ 的零點時，其留數等於該零點的重數，是 $f(z)$ 的極點時，留數等於該極點的階數的負值。對這積分應用留數定理，可知代替(120)式現在有：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f'(z)}{f(z)}dz = m-n, \tag{126}$$

其中 m 是函數在區域內部的零點的個數，n 是極點的個數。設函數的零點是 $b_1, \cdots, b_m$，極點是 $c_1, \cdots, c_n$，這裏 k 重零點或 k 階極點作 k 個零點或極點計算。用留數定理不難證明下面的公式：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = (b_1+\cdots+b_m)-(c_1+\cdots+c_n), \tag{127}$$

即左邊的積分表示零點的坐標總和減去極點的坐標總和。事實上，例如設 b 為 k 重零點，則在這點附近下面的展開式成立：

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = [b+(z-b)]\left[\frac{k}{z-b}+a_0+a_1(z-b)+\cdots\right],$$

由此立刻可知在一點 b 的留數等於 kb。對於極點也有類似的結論。

最後對前述變區域為區域的保角變換的定理再加一點補充。設已知 $f(z)$ 在區域 B 的內部有一個單極點，即在公式(126)中 $n=1$，又 $f(z)$ 將 l 變為不自交的簡單閉曲線 l_1，但沿 l 進行的正方向對應於沿 l_1 進行的負方向。仍舊回到前面的兩函數 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$。他們在區域 B 的內部有和 $f(z)$ 相同的單極點。第一個函數幅角的變化以 2π 為單位時，等於 (-1)。但另一方面，由公式(126)，幅角的變化應該等於零點的個數減去極點的個數，而由假定函數有一個極點。因此知道函數 $F_1(z)$ 在 B 內沒有零點。相反的，當 z 沿 l 走一週時，函數 $F_2(z)$ 的幅角的變化等於零，即零點的個數等於極點的個數。但已知 $F_2(z)$ 有一個極點，所以他也有一個零點。這樣函數 $f(z)$ 就將 l 的內域變為 l_1 的外域，其中 $f(z)$ 的極點變為 w 平面上的無限遠點。

23. 冪級數的反演　我們現在應用虛指定理來研究冪級數：

$$w = a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\cdots = F(z) \tag{128}$$

的反函數。首先假定係數 $a_1\neq 0$，即 $F'(b)\neq 0$。對 b 點鄰近的 z 值，所

得到的 w 值也在 a_0 的鄰近。現在要證明 b 點的某一鄰域經變換(128)後變成 a_0 的一個單葉鄰域,包含 a_0 在其內。由此立刻可知(128)的反函數在 a_0 的鄰域中爲單值正則,因此可依 $(w-a_0)$ 的冪展開爲泰勒級數。

函數 $$f(z)=a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\cdots$$
以 b 點爲單零點,且在這點的某一鄰域中不等於零[18]。設 K 是一個以 b 爲中心的圓,而函數 $f(z)$ 在 K 中爲正則並有唯一的零點 $z=b$。在這圓的圓周 C 上 $|f(z)|\neq 0$,並且存在正數 m,使 $|f(z)|>m$。又設 K_1 是 w 平面上以 a_0 爲中心,半徑爲 $\rho<m$ 的圓。在這圓中取一固定點 w_0。

我們顯然有 $|a_0-w_0|<\rho<m$。又因在 C 上 $|f(z)|>m$,故在 C 上有 $|a_0-w_0|<|f(z)|$。由盧捨定理,函數
$$a_0-w_0+f(z)=a_0+f(z)-w_0=F(z)-w_0$$
與 $f(z)$ 在圓 K 之內的零點的個數相同,即有一個零點。換句話說,當 z 在 b 點的某一鄰域中變動時,$w=F(z)$ 的值遮蓋一個單葉圓 K_1,即一般而論,單葉圓 K_1 對應於 $z=b$ 的一個非圓形鄰域(包含 b 點在其內),而這就是我們所要證明的。再說一遍:若在級數(128)中係數 $a_1\neq 0$,則 $z=b$ 的鄰域變成 $w=a_0$ 的單葉鄰域,且在 $w=a_0$ 的鄰近級數(128)可以反演爲:

$$z=b+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(w-a_0)^n。\tag{129}$$

現在再看當級數(128)中前若干項的係數等於零的情形:

$$w-a_0=a_m(z-b)^m+a_{m+1}(z-b)^{m+1}+ \\ +a_{m+2}(z-b)^{m+2}+\cdots \qquad (a_m\neq 0),\tag{130}$$

即 $$w-a_0=a_m(z-b)^m\left[1+\frac{a_{m+1}}{a_m}(z-b)+\frac{a_{m+2}}{a_m}(z-b)^2+\cdots\right]。$$

上式可改寫爲：

(131) $\sqrt[m]{w-a_0}=\sqrt[m]{a_m}(z-b)\left\{1+\left[\frac{a_{m+1}}{a_m}(z-b)+\frac{a_{m+2}}{a_m}(z-b)^2+\cdots\right]\right\}^{\frac{1}{m}}$

這裏 $\sqrt[m]{a_m}$ 取一個一定的值。這等式和(130)是相抵的。他的右邊方括弧之內的級數和當 z 很接近於 b 時接近於零。因此可以應用牛頓二項式公式[16]而得：

$$\{1+[\ ]\}^{\frac{1}{m}}=1+\frac{1}{m}[\ ]+\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{2!}[\ ]^2+\cdots。$$

我們可以找到一個以 b 爲中心的很小的圓，使方括弧中的級數在其內爲正則，並且他的模不大於一個小於 1 的正數 q。在這圓中上面的級數當然絕對且一致收斂，他的每一項都是這圓中的冪級數，因此由維爾史特拉斯定理在冪級數方面的應用，得到在這圓中(131)式右邊花括弧的冪級數展開式：

$$\{1+[\ ]\}^{\frac{1}{m}}=1+c_1(z-b)+c_2(z-b)^2+\cdots,$$

而(131)式就可改寫爲：

(131_1) $\qquad \sqrt[m]{w-a_0}=d_1(z-b)+d_2(z-b)^2+\cdots,$

其中 $d_1=\sqrt[m]{a_m}\neq 0$。應用牛頓二項式公式，取定了(131)式右邊的根式的一定的值，(131_1)式就給出 $\sqrt[m]{w-a_0}$ 的同樣的值，把 $\sqrt[m]{w-a_0}$ 的這個值記作 w'：

(132) $\qquad w'=\sqrt[m]{w-a_0}=d_1(z-b)+d_2(z-b)^2+\cdots$

由這一節前面所證($d_1\neq 0$)知道 $z=b$ 點的單葉鄰域變爲 $w'=0$ 的單葉鄰域，而由 $w-a_0=w'^m$，$w'=0$ 的單葉鄰域變爲 $w=a_0$ 的 m 葉鄰域[19]，就是說，在(130)的情形，$z=b$ 點的單葉鄰域變爲 $w=a_0$ 的 m 葉鄰域。

又函數(132)的導數在 $z=b$ 點不等於零，因此在這函數所決定的

變換之下，在 $z=b$ 點的角度不變[3]。又因 w' 自乘 m 次方以後，輻角增大 m 倍，所以變換 $w-a_0=w'^m$ 把在 $w'=0$ 點的角度擴大 m 倍，即函數(130)所決定的變換將在 $z=b$ 點的角度擴大 m 倍。最後，如前已證，冪級數(132)反演爲下面的形狀：

$$z=b+\sum_{n=1}^{\infty} c_n w'^n,$$

或者還原成變數 w，即得冪級數(130)的反演：

$$z=b+\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\sqrt[m]{w-b})^n \text{。} \tag{133}$$

注意，公式 $w'=\sqrt[m]{w-b}$ 變 $w=b$ 的 m 葉鄰域爲 $w'=0$ 的單葉鄰域，假如我們把根的 m 個値都取出來的話。因此在展開式(133)中，祇有取等式右邊根式的所有的値時，我們纔能得到 $z=b$ 點的單葉鄰域。

以上我們祇考慮了 z 平面上的 b 點和與它對應的 w 平面上的 a_0 點都是有限遠點的情形。當他們之中有一點或兩點都是無限遠點時，也可以得到完全類似的結果。例如，設 $b=\infty$，a_0 爲有限。這時代替(130)式，有下之展開式：

$$w-a_0=a_m\frac{1}{z^m}+a_{m+1}\frac{1}{z^{m+1}}+\cdots \qquad (m>0;\ a_m\neq 0)\text{。} \tag{134}$$

若 $m=1$，則 $z=\infty$ 的單葉鄰域變爲 $w=a_0$ 的單葉鄰域。當 $a_0=\infty$ 而 b 爲有限時，函數以 $z=b$ 爲極點。若爲單極點，卽展開式爲：

$$w=\frac{a_{-1}}{z-b}+a_0+a_1(z-b)+\cdots, \tag{135}$$

則 $z=b$ 點的單葉鄰域變爲 $w=\infty$ 的單葉鄰域。最後，若 $b=a_0=\infty$，函數在無限遠點的鄰域中有定義，且以這點爲極點。若爲單極點，則展開式形式如：

$$w=az+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots, \tag{136}$$

且 $z=\infty$ 的單葉鄰域變爲 $w=\infty$ 的單葉鄰域。(136)的反函數有同樣形式的展開式:

$$z=\frac{1}{a}w+b_0+\frac{b_1}{w}+\frac{b_2}{w^2}+\cdots。\tag{137}$$

24. 對稱原理　在[18]中我們定義了從區域 B_1 到另一區域 B_2 的解析延拓,當兩區域有重疊部分時。這時,在一般情形之下應該怎樣實地去履行這種解析延拓,我們沒有給任何合於實用的方法。現在我們指出在某種特別情形時履行解析延拓的一個可能性,其時新區域和舊區域並不重疊,而祇沿一部分境界線彼此相接。首先要證明一個輔助定理。

黎曼定理　若 $f_1(z)$ 在曲線 L 上和 L 的一邊爲正則,而 $f_2(z)$ 在 L 上及其另一邊爲正則,又兩函數在 L 上全同,則在一個包含 L 在內的區域中他們共同定義一個正則函數。或者換句話說,$f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 的解析延拓。

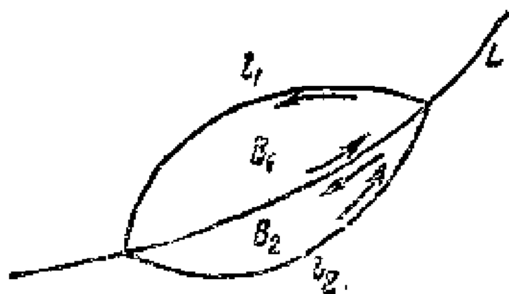


圖 21

在 $f_1(z)$ 爲正則的區域及 $f_2(z)$ 爲正則的區域中各畫一線路 l_1 和 l_2,他們有公共端點,並且都在 l 上,使得 $f_i(z)$ 在 l_i 和 L 所包圍的區域中爲正則($i=1,2$)(圖 21)。在 B_1 中取一點 z,他當然在 B_2 之外,因此我們可以寫[7]:

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1+L}\frac{f_1(z')}{z'-z}dz';$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_2+L}\frac{f_2(z')}{z'-z}dz'。$$

若將這兩等式相加,則在右邊遇到兩個在 L 上方向相反的積分,而兩積分中的被積函數也相等,因由假設 $f_1(z')$ 和 $f_2(z')$ 在這 L 上彼此全

同。這樣，L 上的兩積分就彼此相消，剩下來祇有在 l_1 和 l_2 上的積分了。爲簡單起見，以 $f(z')$ 表示一函數，他在 l_1 上和 $f_1(z')$ 全同，在 l_2 上和 $f_2(z')$ 全同。前兩式相加後卽得：

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1+l_2}\frac{f(z')}{z'-z}dz'。$$

同樣若取 z 點在區域 B_2 中，則可得：

$$f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1+l_2}\frac{f(z')}{z'-z}dz'。$$

卽兩函數 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 可以用同一個沿閉線路 (l_1+l_2) 的勾犀型積分來表示。因此區域 B_1 中的函數 $f_1(z)$ 就可被解析延拓到區域 B_2 中去，而 B_2 中的 $f_2(z)$ 也可被解析延拓到 B_1 中去，這種解析延拓的結果造成一個解析函數 $f(z)$，而黎曼定理也就得以證明。

注意，在以上的證明中所用到的勾犀公式，他當函數在閉區域中爲連續，而祇在區域內部爲正則時也成立。因此在黎曼定理中，我們可以把函數 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在曲線 L 上爲正則這條件除去，而祇假設他們直到 L 上都是連續就夠了。這時黎曼定理就證實了每一函數被解析延拓到 L 的另一邊的可能性，並且由這種解析延拓所得到的恰好就是另一函數。

現在轉過來敍述對稱原理。

對稱原理　若 $f_1(z)$ 在實軸上的線段 (a, b) 的一邊爲正則，直到這線段上都是連續，並且在線段上取實值，則這函數可以被解析延拓到線段的另一邊去，且在關於實軸爲對稱的兩點函數取共軛複數值。

爲確定起見，設函數 $f_1(z)$ 在一個和線段 (a, b) 相接而位於其上的區域 B_1 中爲正則（圖 22）。做一個區域 B_2，他和 B_1 關於實軸爲對稱。照下面的規則在 B_2 中定義一個函數 $f_2(z)$：設對 B_2 中一點 A_2，B_1 中的對稱點爲 A_1，則定義 $f_2(z)$ 在 A_2 的值是 $f_1(z)$ 在 A_1 的值的共軛複

數。這兩對稱點 A_1 和 A_2 的複坐標顯然也是共軛，若記 $\bar{a}$ 爲複數 a 的共軛複數，則函數 $f_2(z)$ 在區域 B_2 中的定義可寫如：

$$f_2(z)=\overline{f_1(\bar{z})}。$$

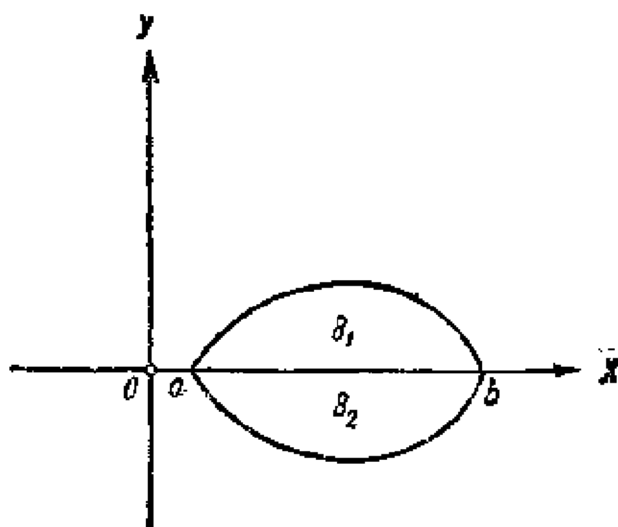


圖 22

這新做的函數在區域 B_2 中爲正則。實際上，這時自變數的改變量 Δz 是 B_1 中在對稱點的改變量的共軛值，而函數的改變量 Δw 是 $f_1(z)$ 在對稱點的改變量的共軛值。對兩改變量的比率 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 也可以說同樣的話。因此對函數 $f_2(z)$，這比率必趨向一定值爲極限，這極限值就等於對應於 $f_1(z)$ 的比率的極限值的共軛複數，卽 $\overline{f_1'(\bar{z})}$，所以函數 $f_2(z)$ 在區域 B_2 中爲正則。在線段 (a, b) 上，$f_2(z)$ 和 $f_1(z)$ 全同，因爲 $f_1(z)$ 在線段上取實値之故。這樣，由黎曼定理可以知道 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 在線段另一邊的解析延拓。對稱原理也就得以證明。

我們可以用幾何學的話來敍述對稱原理，卽：若 $f_1(z)$ 在實軸上線段 (a, b) 的一邊爲正則，並且將這線段變爲實軸上的另一線段，則這函數可以被解析延拓到線段的另一邊去，並且關於實軸爲對稱的任二點經過變換後仍舊關於實軸爲對稱。引進"關於圓周爲對稱的點"這個概念以後，對稱原理可以用更一般的方式來敍述。兩點稱爲關於一圓周爲對稱，如果他們位於這圓周

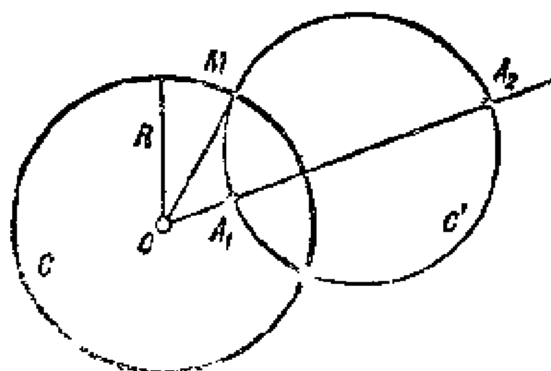


圖 23

的同一半徑之上(一點在半徑上,一點在半徑的延長線上),並且他們和圓心的距離之積等於半徑的平方(圖 23)。

設 A_1 和 A_2 是關於圓周 C 為對稱的兩點。過這兩點任意畫一圓 C',並設 M 是 C' 和 C 的交點之一。則 C' 的割線 $\overline{OA_2}$ 和他在圓外的部分 $\overline{OA_1}$ 之積應該等於從 O 點所引 C' 的切線的平方。另一方面,由定義,$\overline{OA_2}$ 和 $\overline{OA_1}$ 的積應該等於 $\overline{OM^2}$,即 C 的半徑的平方。因此知道半徑 $\overline{OM}$ 就是過 O 點的 C' 的切線,即 C' 和 C 是正交。由此不難看到兩點 A_1 和 A_2 關於圓周 C 為對稱的特徵性質是:任一經過 A_1 和 A_2 的圓周必定和 C 正交,換句話說,經過關於圓周 C 為對稱的兩點的圓周束就是經過這兩點和 C 正交的圓周全體。兩個關於直線為對稱的點也具有這種特徵性質,即經過這兩點的圓周束就是和直線正交的圓周全體(圖 24)。

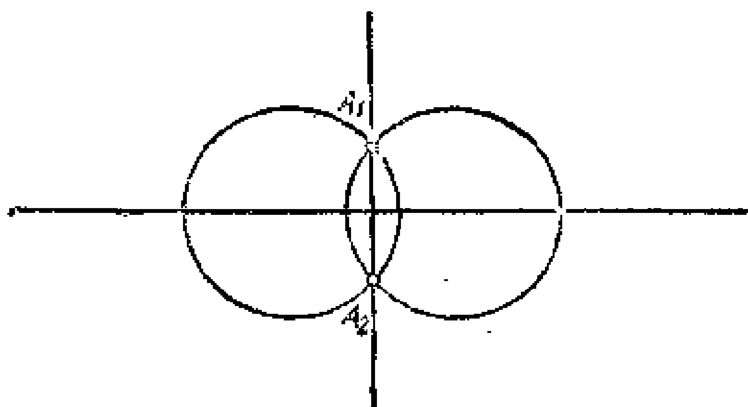


圖 24

一般形式的對稱原理如下:若 $f_1(z)$ 在圓周 C_1 上弧 (a,b) 的一邊為正則,直到這弧上都是連續,並且將這弧變為另一圓周 C_2 上的一弧,則 $f_1(z)$ 可被解析延拓到弧 (a,b) 的另一邊去,並且關於 C_1 為對稱的兩點變成關於 C_2 為對稱的兩點。在這種敍述方式之下,"圓周"兩字的意義除了包含通常的圓周外,也包含直線在內。

這個一般對稱原理將在下一章開始時證明之。

25. 收斂圓圓周上的泰勒級數　設泰勒級數

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-b)^k \tag{138}$$

以 R 爲收斂半徑。置 $z-b=\rho e^{i\varphi}$，級數(138)可寫爲：

(139) $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k e^{ik\varphi}$$

或 $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)\rho^k.$$

這級數由假設當 $\rho<R$ 時收斂。至於當 $\rho=R$ 時，卽 z 在收斂圓圓周上時，級數收斂與否並沒有一定。例如，若取級數

(140) $$1+z+z^2+\cdots,$$

有收斂半徑 $R=1$。則在收斂圓圓周上，卽當 $|z|=1$ 時，級數每項的模都等於 1，因此級數顯然在收斂圓圓周上處處發散。舉一個相反的例子，看級數

(141) $$1+\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots$$

對這級數，後項的模比前項的模爲：

$$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}\right| : \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |z|,$$

比率的極限是 $|z|$，故由達朗倍爾判定法，級數的收斂半徑也是 1。以 $z=e^{i\varphi}$ 代入，得到一個級數，其一般項的模等於正數 $\frac{1}{n^2}$，是收斂級數 $\sum\frac{1}{n^2}$ 的一般項。因此級數(141)不但在收斂圓內部，並且在整個閉收斂圓中，包含圓周在內，絕對且一致收斂。這樣我們看到，關於冪級數在收斂圓圓周上的收斂問題可以有各種不同的情形發生。

我們早已知道微分和積分不改變冪級數的收斂圓。但是這種運算對於級數在收斂圓圓周上的收斂性而言，卻是可以發生影響的。例如，將級數(140)積兩分次，得到級數：

$$\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{2\cdot 3}+\frac{z^4}{3\cdot 4}+\cdots,$$

他和級數(141)一樣，在整個閉圓 $|z|\leqslant 1$ 中絕對且一致收斂。

若冪級數在收斂圓的圓周上有收斂的時候，那末對於他的和有下面的定理。在實變數的情形我們已經證明了一個和他完全類似的定理[I, 146]，所以在這裏只寫出這定理的內容不去證明他了。

亞貝爾第二定理　若冪級數(138)在收斂圓圓周上一點 $z-b=Re^{i\varphi_0}$ 收斂，他就在整個半徑 $\arg(z-b)=\varphi_0$ 上一致收斂。由此立刻可知級數的和是在這半徑上的連續函數，就是說：當 z 從圓內沿半徑 $\arg(z-b)=\varphi_0$ 接近於極限值 $Re^{i\varphi_0}+b$ 時，對應的級數的和也接近於一極限值，就是他在圓周上 $Re^{i\varphi_0}+b$ 點的值。若干三角級數的和即可藉這定理簡單地求出來。

試看一個例子。在展開式

$$\lg(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots$$

中用 $(-z)$ 代 z 以後，再從這級數減去新得到的級數，即得：

$$\lg\frac{1+z}{1-z}=2\left(\frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right), \tag{142}$$

他的收斂圓是 $|z|<1$。在這展開式中以 $z=e^{i\varphi}$ 代入，再分開實數和虛數部分，得：

$$2\left(\frac{\cos\varphi}{1}+\frac{\cos 3\varphi}{3}+\frac{\cos 5\varphi}{5}+\cdots\right)+2i\left(\frac{\sin\varphi}{1}+\frac{\sin 3\varphi}{3}+\frac{\sin 5\varphi}{5}+\cdots\right)。$$

可以證明(這裏不擬詳述)，若 $\varphi\neq k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$，上面兩個三角級數都收斂。現在要決定這兩級數的和。將(142)式左邊的函數分開爲實數和虛數部分：

$$\lg\frac{1+z}{1-z}=\lg\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+i\arg\frac{1+z}{1-z}。$$

由圖 25，當 $z=e^{i\varphi}$ 時易知：

$$|1+z|=2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\quad(0<\varphi<2\pi),$$

$$|1-z|=2\sin\frac{\varphi}{2}。$$

分數 $\frac{1+z}{1-z}$ 的幅角等於向量 $AM'(-z-1)$ 和向量 $AM(z-1)$ 所成的角度。但當 $z=0$ 時級數(142)的和爲零，因此這時角度也應該等於零。當 z 是 $e^{i\varphi}$ 時這角所對的弦是圓的直

徑，故等於$\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$。這樣就可知道上述兩三角級數的和爲：

$$\lg \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=2\left(\frac{\cos\varphi}{1}+\frac{\cos 3\varphi}{3}+\cdots\right)\qquad(0<\varphi<\pi)$$

$$\frac{\pi}{2}=2\left(\frac{\sin\varphi}{1}+\frac{\sin 3\varphi}{3}+\cdots\right)。$$

圖 25

再注意一件和形式爲(139)的三角級數有關的事。將係數a_k分開爲實數和虛數部分$a_k=\alpha_k-i\beta_k$。代入(139)式，再將整個級數分爲實數和虛數部分，卽得：

$$(143)\qquad f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi)\rho^k+i\sum_{k=0}^{\infty}(-\beta_k\cos k\varphi+\alpha_k\sin k\varphi)\rho^k。$$

第二個級數和第一個不同的地方祇在把$\cos k\varphi$和$\sin k\varphi$的係數互換一下，並且原來$\sin k\varphi$的係數換成$\cos k\varphi$的係數以後，還要再變一個符號。通常第二個三角級數稱爲第一個的共軛級數。

注意，當我們把a_k分開爲實數和虛數部分時，爲以後的公式比較簡單起見，用了一個負號。但這並沒有什麽緊要的關係，因爲實數β_k可爲正亦可爲負。

26. 積分的主值　我們現在轉到勾厚型積分的極限値的研究。首先得引進一個和間斷函數的積分有關的新概念。設 $x=c$ 爲有限區間 (a,b) 內部一點，$f(x)$ 是在這區間中所定義的函數。又設積分

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \quad 和 \quad \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \tag{144}$$

存在，對於任意小的 $\varepsilon>0$。例如，設 $f(x)$ 在全區間 (a,b) 中爲連續，除了 $x=c$ 點以外，又當 $x\to c$ 時，$f(x)$ 非有界。$f(x)$ 在區間 (a,b) 上的廣義積分的定義如下：若當 $\varepsilon\to+0$ 時，(144) 的兩積分都趨向有限極限値，則這兩極限値之和稱爲 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上的積分 [I, 97]。若兩積分各自的極限値不存在，而他們的和當 $\varepsilon\to+0$ 時趨向有限極限値，則這極限値

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right]$$

稱爲 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上的積分的主値：

$$\text{v. p.}\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right], \tag{145}$$

這裏 v. 和 p. 是法文 valeur principale 兩字的第一個字母，即中文"主値"的意思。

以後爲簡單起見，在積分符號之前不再寫 v. p. 兩字。定義 (145) 的特徵性質是：在等式右邊兩個取極限的積分中有同一個趨向 $(+0)$ 的 ε。

當 $f(x)$ 在區間內有若干個不連續點時，和上面完全類似的可以定義積分的主値。當函數 $f(x)$ 在全區間 (a,b) 上通常的廣義積分存在時 [I, 97]，積分 (145) 的主値顯然和廣義積分相等。由 (145) 的定義，立刻可知常數因子可以拿到積分符號之外來，又有限個項的和的積分等於各項的積分的和，這裏每一積分都祇要假定在主値的意義之下存在即可。

現在舉幾個積分的主値的簡單例子。先看積分

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-x)^p}, \tag{146}$$

其中 $a<x<b$，p 是個正整數。

若 $p>1$，則有：

$$\int_a^{x-\varepsilon}\frac{dt}{(t-x)^p}+\int_{x+\varepsilon}^b\frac{dt}{(t-x)^p}=-\frac{1}{p-1}\left\{\frac{1}{(b-x)^{p-1}}-\frac{1}{(a-x)^{p-1}}+\right.$$

$$\left.+[(-1)^{p-1}-1]\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\right\}。$$

若 p 爲偶數，則右邊最後一項是 $(-2):\varepsilon^{p-1}$，因此當 $\varepsilon\to(+0)$ 時等式右邊無限增大，而積分 (146) 就不存在。若 p 爲奇數，則等式右邊不含 ε，故得：

$$\int_a^b\frac{dt}{(t-x)^p}=\frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{(b-x)^{p-1}}-\frac{1}{(a-x)^{p-1}}\right] \qquad (p\text{ 爲奇數})$$

當 $p=1$ 時有：

$$\int_a^{x-\varepsilon}\frac{dt}{t-x}+\int_{x+\varepsilon}^b\frac{dt}{t-x}=\lg(x-t)\Big|_{t=a}^{t=x-\varepsilon}+\lg(t-x)\Big|_{t=x+\varepsilon}^{t=b}=\lg\frac{b-x}{x-a},$$

即

$$\int_a^b\frac{dt}{t-x}=\lg\frac{b-x}{x-a}。$$

函數 $\omega(x)$ 稱爲在區間(a, b)中滿足指數 α 的黎浦希茲條件，$0<\alpha\leqslant 1$，若對區間中任二值 x_1 和 x_2，下式成立：

(147) $$|\omega(x_2)-\omega(x_1)|\leqslant k|x_2-x_1|^{\alpha},$$

其中 k 是個常數。當 $\alpha=1$ 時這條件我們早已引用過，並且知道當 $\omega(x)$ 在區間中有有界導數時這條件一定滿足[II, 51]。現在看積分：

(148) $$f(x)=\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-x}dt,$$

他可以改寫爲：$$\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-x}dt=\int_a^b\frac{\omega(t)-\omega(x)}{t-x}dt+\omega(x)\int_a^b\frac{dt}{t-x}。$$

應用條件(147)，我們得到右邊第一個積分中的被積函數在 $t=x$ 點鄰域中的估計：

(149) $$\left|\frac{\omega(t)-\omega(x)}{t-x}\right|\leqslant\frac{k}{|t-x|^{1-\alpha}},$$

因此這積分在通常意義之下爲絕對收斂積分[II, 82]。第二個積分等於：

$$\omega(x)\lg\frac{b-x}{x-a}。$$

這樣，如果 $\omega(t)$ 滿足黎浦希茲條件(147)，對區間(a,b)內部任一 x，積分(148)有意義。因而由等式(148)所定義的函數 $f(x)$ 對於(a, b)內部任一 x 也就有意義。作積分：

(150) $$\int_a^{x-\varepsilon}\frac{\omega(t)}{t-x}dt+\int_{x+\varepsilon}^b\frac{\omega(t)}{t-x}dt。$$

當 ε 爲正時若 x 屬於任一包含在區間 (a, b) 內部的閉區間，而 t 屬於區間 $(a, x-\varepsilon)$ 或 $(x+\varepsilon, b)$，則上兩積分中的被積函數都是 t 和 x 的連續函數，從而(150)式就是 x 的連續函數[II, 80]。由等式：

$$\frac{\omega(t)}{t-x}=\frac{\omega(t)-\omega(x)}{t-x}+\omega(x)\frac{1}{t-x}$$

及條件(147)不難證明，當 $\varepsilon\to(+0)$ 時 (150)式關於 x 一致地趨向極限值 $f(x)$，故由(148)式所定義的函數 $f(x)$ 是任何包含於(a, b)之內的閉區間上的連續函數，簡單些說，$f(x)$是區間(a, b)內部的連續函數。以後我們要證明更準確一些的結果，即：若 $\omega(t)$滿足指數 $\alpha<1$ 的黎浦希茲條件，則 $f(x)$ 在任何包含於區間(a, b)內部的區間中也滿足同一指數 α 的黎浦希茲條件；又若在條件(147)中 $\alpha=1$，則 $f(x)$滿足任何指數小於 1 的黎浦希茲條件。

由條件(147)顯然得出函數 $\omega(x)$ 的連續性。反之，連續函數卻不一定滿足黎浦希茲條件，即黎浦希茲條件較連續條件爲強。還要注意：要積分(148)在一點 x 存在，祇需 $\omega(t)$ 在 x

的某一部域中滿足黎浦希茲條件，而在區間(a, b)的其他部分$\omega(t)$祇需爲連續或僅可積分就夠了。實際上，要積分(148)存在，只要對所有和x相當接近的t值，(149)的估計能成立卽可。若對(a, b)內部每一點x，可以用一區間遮蓋他，在其中黎浦希茲條件(147)能對適當的k和α滿足，則積分(148)對(a, b)內部任一點x就必定存在。這時在(a, b)內部不同的區間上常數k和α也可以不同。

現在證明在積分(148)中更換變數的可能性。首先證明一個預備定理：若如此取$\eta_1(\varepsilon)$和$\eta_2(\varepsilon)$，使比率$\eta_1(\varepsilon):\varepsilon$和$\eta_2(\varepsilon):\varepsilon$當$\varepsilon\to(+0)$時都趨向零，則

$$\int_a^b \frac{\omega(t)}{t-x}\,dt=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{x-\varepsilon+\eta_1(\varepsilon)}\frac{\omega(t)}{t-x}\,dt+\int_{x+\varepsilon+\eta_2(\varepsilon)}^b\frac{\omega(t)}{t-x}\,dt\right]。$$

要證明這式子，只需證明

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon+\eta_1(\varepsilon)}\frac{\omega(t)}{t-x}\,dt=0 \quad 和 \quad \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{x+\varepsilon}^{x+\varepsilon+\eta_2(\varepsilon)}\frac{\omega(t)}{t-x}\,dt=0。$$

今證第一個等式爲例。設$\eta_1(\varepsilon)>0$，則當$x-\varepsilon\leqslant t\leqslant x-\varepsilon+\eta_1(\varepsilon)$時$|t-x|\geqslant\varepsilon-\eta_1(\varepsilon)$，因此

$$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon+\eta_1(\varepsilon)}\frac{\omega(t)}{t-x}\,dt\right|\leqslant\frac{m\cdot\eta_1(\varepsilon)}{\varepsilon-\eta_1(\varepsilon)}=\frac{m}{1-\dfrac{\eta_1(\varepsilon)}{\varepsilon}}\cdot\frac{\eta_1(\varepsilon)}{\varepsilon}\to0，$$

其中m是$|\omega(t)|$的最大值。若$\eta_1(\varepsilon)<0$，則可寫：

$$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon+\eta_1(\varepsilon)}\frac{\omega(t)}{t-x}dt\right|\leqslant\frac{m\cdot|\eta_1(\varepsilon)|}{\varepsilon}\to0，$$

同樣可證第二個等式。

用這個預備定理易證在積分(148)中更換變數的公式。

定理 設$t=\mu(\tau)$爲τ的單調增加函數，當$\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$時$t$在區間$(a, b)$中變動，並且$\mu(\tau)$在區間$(\alpha, \beta)$中有一階及二階連續導數，且在這區間內$\mu'(\tau)\neq0$。在這些假設之下，下面的公式成立：

$$\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-x}dt=\int_\alpha^\beta\frac{\omega[\mu(\tau)]\mu'(\tau)}{\mu(\tau)-\mu(\xi)}d\tau, \tag{151}$$

其中$x=\mu(\xi)$，右邊的積分取主值的意義。

由積分主值的定義我們做下面兩積分的和：

$$\int_\alpha^{\xi-\varepsilon}\frac{\omega[\mu(\tau)]\mu'(\tau)}{\mu(\tau)-\mu(\xi)}d\tau+\int_{\xi+\varepsilon}^\beta\frac{\omega[\mu(\tau)]\mu'(\tau)}{\mu(\tau)-\mu(\xi)}d\tau。 \tag{152}$$

記$\mu(\xi-\varepsilon)=x-\varepsilon'$及$\mu(\xi+\varepsilon)=x+\varepsilon'+\eta$。由泰勒公式：

$$\mu(\xi+h)=\mu(\xi)+h\mu'(\xi)+\frac{h^2}{2}\mu''(\xi+\theta h) \qquad (0<\theta<1)$$

分別置$h=-\varepsilon$及$+\varepsilon$，得：

$$x-\varepsilon'=x-\varepsilon\mu'(\xi)+\frac{\varepsilon^2}{2}\mu''(\xi-\theta_1\varepsilon);$$

$$x+\varepsilon'+\eta=x+\varepsilon\mu'(\xi)+\frac{\varepsilon^2}{2}\mu''(\xi+\theta_2\varepsilon)\qquad(0<\theta_i<1,\ i=1,2),$$

由此立刻有：

$$\varepsilon'=\varepsilon\left[\mu'(\xi)-\frac{\varepsilon}{2}\mu''(\xi-\theta_1\varepsilon)\right];\quad \eta=\frac{\varepsilon^2}{2}[\mu''(\xi+\theta_2\varepsilon)+\mu''(\xi-\theta_1\varepsilon)],$$

因此當 $\varepsilon'\to 0$ 時比率 $\eta:\varepsilon'\to 0$。將(152)式中兩積分的變數改為 t，得：

$$\int_a^{x-\varepsilon'}\frac{\omega(t)}{t-x}dt+\int_{x+\varepsilon'+\eta}^{b}\frac{\omega(t)}{t-x}dt,$$

由前面的預備定理可知(152)的極限為(151)式左邊的積分，公式(151)即得證明。定理中函數 $\mu(\tau)$ 為單調增加的條件顯然也可改為單調減少。

27．積分的主值(續)　積分的主值這概念在線積分的情形也可以定義起來。我們現在祇看勾犀型積分：

$$f(\xi)=\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau \tag{153}$$

這裏 L 是複變數 τ 平面上的閉或不閉線路。ξ 是 L 上的點，若 L 非閉線路時，ξ 不是 L 的端點。設 s 表示 L 上從某一點量起的弧長。以後將假設在 L 的參數方程 $\tau(s)=x(s)+iy(s)$ 中函數 $x(s)$ 和 $y(s)$ 有連續的一階及二階導數。設 $\tau=\xi$ 這點對應於 $s=s_0$。我們可以定義積分(153)的主值為關於實變數 s 的積分：

$$\int_0^l\frac{\omega[\tau(s)]}{\tau(s)-\tau(s_0)}\tau'(s)ds \tag{154}$$

的主值，其中 l 是 L 的長，且可設 s_0 在積分區間之內。和[26]中一樣，可以證明若函數 $\omega(\tau)$ 在 L 上滿足黎浦希茲條件：

$$|\omega(\tau_2)-\omega(\tau_1)|\leqslant k|\tau_2-\tau_1|^{\alpha}\qquad(0<\alpha\leqslant 1) \tag{155}$$

則積分(153)存在。

應用[26]更換變數定理中已經證明的，不難知道若在線路的某一參數方程：$\tau(t)=x(t)+iy(t)$ 中函數 $x(t)$ 和 $y(t)$ 有一階及二階連續導數，且 $\tau'(t)\neq 0$，則由積分(153)的主值可得積分

$$\int_\alpha^\beta\frac{\omega[\tau(t)]}{\tau(t)-\tau(t_0)}\tau'(t)dt$$

的主值，其中(α,β)是參數 t 變動的區間，又 $t=t_0$ 對應於 $\tau=\xi$ 點。若 $\omega(\tau)$ 恆等於1，則積分(153)的原函數為 $\lg(\tau-\tau_0)$，因此當 L 為閉線路時

$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-\xi}=\pi i, \tag{156}$$

這裏我們常設沿閉線路的積分是逆時針方向的。和直線段的情形一樣，可以證明在條件(155)之下，(153)式定義一個函數 $f(\xi)$，當 L 不是閉線路時他在 L 所有的內點上爲連續，當 L 爲閉曲線時則在 L 上任一點爲連續。和直線段的情形一樣，下面更準確一些的定理成立，這是普里瓦洛夫證明的[1]。

當條件(155)成立時，若 $\alpha<1$，則函數 $f(\xi)$ 在閉曲線 L 上滿足同一指數 α 的黎浦希茲條件；若 $\alpha=1$，則滿足任何指數小於 1 的黎浦希茲條件。若 L 不是閉曲線，則在含於 L 之內任一閉弧上 $f(\xi)$ 也滿足上面這些條件。

現在對直線段的情形證明這定理。至於線積分，證明完全類似。首先對黎浦希茲條件作一點注意。不難知道黎浦希茲條件：

(157)
$$|f(\xi+\Delta\xi)-f(\xi)|\leqslant k|\Delta\xi|^{\alpha}$$

祇要對相當小的 $|\Delta\xi|$ 的值能成立卽可。實際上，設(157)當 $|\Delta\xi|\leqslant m$ 時成立，這裏 m 是個正常數。若 $|\Delta\xi|\geqslant m$，則比率

$$\frac{|f(\xi+\Delta\xi)-f(\xi)|}{|\Delta\xi|^{\alpha}}$$

爲有界，卽
$$|f(\xi+\Delta\xi)-f(\xi)|\leqslant k_1|\Delta\xi|^{\alpha}\qquad(|\Delta\xi|\geqslant m),$$
其中 k_1 是個常數。在兩常數 k_1 和 k 中取大的一個，則對所有可以取的 $\Delta\xi$ 的值，黎浦希茲條件均成立。再設 $\beta<\alpha\leqslant 1$，當 $\Delta\xi$ 的模小於 1 時 $|\Delta\xi|^{\beta}>|\Delta\xi|^{\alpha}$，因此若 $f(\xi)$ 滿足指數 α 的黎浦希茲條件，當然也滿足指數 β 的黎浦希茲條件。設兩函數 $f_1(\xi)$ 和 $f_2(\xi)$ 都滿足指數 α 的黎浦希茲條件，易證他們的和與積也滿足指數 α 的黎浦希茲條件。對兩函數的和，由和的模小於或等於模的和一事可知。對兩函數的積，可寫：

$$f_1(\xi+\Delta\xi)f_2(\xi+\Delta\xi)-f_1(\xi)f_2(\xi)=f_2(\xi+\Delta\xi)[f_1(\xi+\Delta\xi)-f_1(\xi)]+$$
$$+f_1(\xi)[f_2(\xi+\Delta\xi)-f_2(\xi)],$$

由此立刻可知他也滿足指數 α 的黎浦希茲條件。

現在回過來證明本定理。我們有：

$$f(\xi)=\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-\xi}\,dt,$$

或
$$f(\xi)=\int_a^b\frac{\omega(t)-\omega(\xi)}{t-\xi}\,dt+\omega(\xi)\lg\frac{b-\xi}{\xi-a},$$

這裏 $\omega(t)$ 滿足某一指數 α 的黎浦希茲條件。設 ξ 是某一含於 (a,b) 之內的區間 I 中的點。在上式右邊第二項中因子 $\omega(\xi)$ 滿足指數 α 的黎浦希茲條件，而第二個因子有有界導數，故滿足指數 1 的黎浦希茲條件。這樣他們的積也就滿足指數 α 的黎浦希茲條件，而定理祇要對函數

①蘇聯科學院報告，23卷9期，1939。

$$\psi(\xi)=\int_a^b \frac{\omega(t)-\omega(\xi)}{t-\xi}\,dt$$

來證明好了。這裏等式右邊是通常的廣義積分。我們要估計下面這積分的模：

$$(158)\qquad \psi(\xi+\Delta\xi)-\psi(\xi)=\int_a^b\left[\frac{\omega(t)-\omega(\xi+\Delta\xi)}{t-\xi-\Delta\xi}-\frac{\omega(t)-\omega(\xi)}{t-\xi}\right]dt,$$

設 $|\Delta\xi|$ 相當小。先從積分的區間中取出一個部分區間 $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$，$\varepsilon=2|\Delta\xi|$，來估計在這部分區間上積分(158)的模。應用條件(155)，得到下面的估值：

$$k\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}(|t-\xi-\Delta\xi|^{\alpha-1}+|t-\xi|^{\alpha-1})\,dt.$$

上式第二項的積分可寫成：

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi}(\xi-t)^{\alpha-1}dt+\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon}(t-\xi)^{\alpha-1}dt=\frac{1}{\alpha}(2^{\alpha}|\Delta\xi|^{\alpha}+2^{\alpha}|\Delta\xi|^{\alpha})$$

對第一項的積分可用類似的方法估計，因此積分(158)在區間 $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ 上的估值就是 $k_1|\Delta\xi|^{\alpha}$，其中 k_1 是個常數。剩下來要估計在兩區間 $(a,\xi-\varepsilon)$ 和 $(\xi+\varepsilon,b)$ 上積分(158)的數值，爲此可將被積函數寫成下面的形式：

$$(159)\qquad [\omega(t)-\omega(\xi+\Delta\xi)]\frac{\Delta\xi}{(t-\xi)(t-\xi-\Delta\xi)}-[\omega(\xi+\Delta\xi)-\omega(\xi)]\frac{1}{t-\xi}.$$

應用(155)，對上式第二項的積分的模有如下的估值：

$$k|\Delta\xi|^{\alpha}\left|\int_a^{\xi-\varepsilon}\frac{dt}{t-\xi}+\int_{\xi+\varepsilon}^{b}\frac{dt}{t-\xi}\right|=k\left|\lg\frac{b-\xi}{\xi-a}\right|\cdot|\Delta\xi|^{\alpha}\leqslant k_2|\Delta\xi|^{\alpha},$$

這裏 k_2 是個常數。於此應注意當 ξ 在區間 I 中變動時上式中對數的模爲有界。現在再來估計(159)式第一項在區間 $(a,\xi-\varepsilon)$ 和 $(\xi+\varepsilon,b)$ 上面的積分。我們只要估計第一個區間上的積分卽可，在第二個區間上可以完全相仿的去做。由(155)式，對(159)式的第一項有如下的估值：

$$\left|[\omega(t)-\omega(\xi+\Delta\xi)]\frac{\Delta\xi}{(t-\xi)(t-\xi-\Delta\xi)}\right|\leqslant k\frac{|\Delta\xi|}{|t-\xi|\cdot|t-\xi-\Delta\xi|^{1-\alpha}}=$$

$$=k\frac{|\Delta\xi|}{|t-\xi|^{2-\alpha}\left|1-\dfrac{\Delta\xi}{t-\xi}\right|^{1-\alpha}}.$$

當 t 在區間 $(a,\xi-\varepsilon)$ 中變動時有 $(\xi-t)\geqslant\varepsilon$，卽 $(\xi-t)\geqslant 2|\Delta\xi|$，因此 $|\Delta\xi|:|t-\xi|\leqslant\frac{1}{2}$，從而：

$$\left|1-\frac{\Delta\xi}{t-\xi}\right|\geqslant\frac{1}{2}.$$

這樣，當 t 在區間 $(a,\xi-\varepsilon)$ 中變動時(159)式第一項的模不大於

$$\frac{2^{1-\alpha}k|\Delta\xi|}{(\xi-t)^{2-\alpha}},\qquad (\xi-t>0)$$

而這一項的積分的模就有下面的估值：

$$2^{1-\alpha}k|\Delta\xi|\int_a^{\xi-\varepsilon}\frac{dt}{(\xi-t)^{2-\alpha}}\text{。} \tag{159₁}$$

若 $\alpha<1$，則得所需的估值：

$$\frac{2^{1-\alpha}k}{1-\alpha}|\Delta\xi|\left[-\frac{1}{(\xi-a)^{1-\alpha}}+\frac{1}{2^{1-\alpha}|\Delta\xi|^{1-\alpha}}\right]\leqslant\frac{k}{1-\alpha}|\Delta\xi|^{\alpha}\text{。}$$

因此當 $\alpha<1$ 時所需(158)式的估值已經得到。若 $\alpha=1$，則估值(159_1)呈下之形式：

$$k|\Delta\xi|[\lg(\xi-a)-\lg(2|\Delta\xi|)],$$

所以當 $\alpha=1$ 時(158)的估值爲：

$$k_3|\Delta\xi|+k_4|\Delta\xi|\lg\frac{1}{|\Delta\xi|},$$

其中 k_3 和 k_4 是常數。記住當 $\Delta\xi\to 0$ 時 $\lg\frac{1}{|\Delta\xi|}$ 比任何 $|\Delta\xi|$ 的負冪都增加得慢，所以可寫：

$$k_3|\Delta\xi|+k_4|\Delta\xi|\lg\frac{1}{|\Delta\xi|}\leqslant k_5|\Delta\xi|^{\beta},$$

其中 β 是任一大於零而小於 1 的數，而定理對 $\alpha=1$ 的情形也得證明。

現在要研究當 ξ 點接近於直線段的端點，例如 $\xi\to a$ 時，函數 $f(\xi)$ 的行爲是怎樣。如前我們假設 $\omega(t)$ 在整個閉區間 (a,b) 上滿足指數 α 的黎浦希茲條件。先設 $\omega(a)=0$。這時對 $t<a$ 的值，可以將函數用零延拓出去，即當 $t<a$ 時設 $\omega(t)=0$。於是 $\omega(t)$ 就在直線段 (a_1,b) 上有定義，$a_1<a$，且黎浦希茲條件並不因延拓而破壞。積分

$$\int_{a_1}^{b}\frac{\omega(t)}{t-\xi}dt=\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-\xi}dt$$

仍舊定義以前的函數 $f(\xi)$，又因 $t=a$ 點在直線段 (a_1,b) 之內，由前已證，可知 $f(\xi)$ 在任一直線段 (a,b_1) 上滿足指數 α（設 $\alpha<1$）的黎浦希茲條件，當 $b_1<b$。現在再設 $\omega(a)\neq 0$。

可寫：

$$f(\xi)=\int_a^b\frac{\omega(t)-\omega(a)}{t-\xi}\,dt+\omega(a)\int_a^b\frac{dt}{t-\xi}\text{。}$$

在第一個積分裏面，當 $t=a$ 時分子等於零，因此這積分定義一函數滿足指數 α 的黎浦希茲條件，直到 $\xi=a$ 點爲止。而第二項在[26]中已知等於：

$$\omega(a)\lg(b-\xi)-\omega(a)\lg(\xi-a)\text{。}$$

這式中的被減數滿足指數 1 的黎浦希茲條件，直到 $\xi=a$ 點爲止。

因此最後在 $\xi=a$ 的鄰域中函數 $f(\xi)$ 呈下面的形式：

$$-\omega(a)\lg(\xi-a)+f_1(\xi),$$

其中 $f_1(\xi)$ 滿足指數 α 的黎浦希茲條件，直到 $\xi=a$ 點爲止。相仿的對端點 $\xi=b$ 可得：

$$\omega(b)\lg(b-\xi)+f_2(\xi),$$

其中 $f_2(\xi)$ 滿足黎浦希兹條件直到 $\xi=b$ 點為止。

$f(\xi)$ 在直線段端點鄰近的行為還可以在 $\omega(t)$ 的更一般假設之下來研究。下面祇舉一些結果，其證明可在穆斯含李舒維爾的書"奇異積分方程"中找到，其中包括關於勾申型積分的詳細而有帶頭性的研究。

定理 設 $\omega(t)$ 在 (a, b) 之內任一閉線段 (a', b') 上滿足指數 α 的黎浦希兹條件(147)，這時常數 k 可因線段 (a', b') 的選擇而變(當 $a'\to a$ 或 $b'\to b$ 時，k 可無限增大)，又設在端點 a 和 b 的鄰近，函數 $\omega(t)$ 呈下面的形式：

$$\omega(t)=\frac{\omega^*(t)}{(t-c)^\gamma},\tag{160}$$

其中 c 代表 a 或 b，$\gamma=\gamma_1+i\gamma_2(\gamma\neq 0)$，而 $0\leqslant\gamma_1<1$，又 $\omega^*(t)$ 滿足某一黎浦希兹條件直到 $t=c$ 點為止。在這些假設之下，可證 $f(\xi)$ 在 (a, b) 之內任一閉線段上滿足指數 α 的黎浦希兹條件，若 $\alpha<1$；滿足任何指數小於 1 的黎浦希兹條件，若 $\alpha=1$；又在 $\xi=c$ 的鄰域中呈下之形式：

$$f(\xi)=\pm\pi\operatorname{ctg}\gamma\pi\frac{\omega^*(c)}{(\xi-c)^\gamma}+f_1(\xi),$$

這時若 $\gamma_1=0$，則 $f_1(\xi)$ 滿足某一黎浦希兹條件直到 $\xi=c$ 點為止；若 $\gamma_1\neq 0$，則

$$f_1(\xi)=\frac{f^*(\xi)}{|\xi-c|^{\gamma_0}},$$

其中 $f^*(\xi)$ 滿足黎浦希兹條件直到 $\xi=c$ 點為止，又 $\gamma_0<\gamma$。當 $c=a$ 時 $f(\xi)$ 的表示式中第一項取(+)號，當 $c=b$ 時取(−)號。若直線段改為任一相當光滑的，以 $t=a$ 和 $t=b$ 為端點的弧時，這些結果也一樣成立，但那時積分變數應該是複變數 t 了。

注意：若 $\gamma=0$，就成立前面已證的結果：

$$f(\xi)=\pm\omega(c)\lg\frac{1}{\xi-c}+f_1(\xi)$$

其中 $f_1(\xi)$ 滿足黎浦希兹條件直到 $\xi=c$ 點為止。

28. 勾申型積分 現在我們看勾申型積分[8]：

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-z}d\tau,\tag{161}$$

其中 z 不在 L 之上。若 L 為閉線路，這積分定義兩個不同的正則函數，一在 L 之內，一在 L 之外。若 L 不是閉線路，則 $F(z)$ 在 L 以外為正則。在兩種情形都是 $F(\infty)=0$。若 $z=\xi$ 在線路 L 之上，則積分(161)取主值，且可改寫為下面的形式：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau=\frac{\omega(\xi)}{2\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-\xi}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}d\tau,$$

由(156)式有：

$$(162)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau=\frac{1}{2}\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}d\tau\text{。}$$

首先設 L 爲閉線路而證明下定理：若 z 趨向 L 上一點 ξ 爲極限，則積分(161)的極限值爲：

$$(163)\qquad \pm\frac{1}{2}\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau,$$

這裏當 $z\to\xi$ 從 L 內部時取(+)號，當 $z\to\xi$ 從 L 外部時取(−)號。先看 z 從 L 內部趨向 ξ 的情形。積分(161)可以改寫爲：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{\omega(\xi)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-z}d\tau,$$

或

$$(164)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-z}d\tau=\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-z}d\tau\text{。}$$

研究兩積分之差：

$$(165)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}\cdot\frac{z-\xi}{\tau-z}d\tau\text{。}$$

在 L 上 ξ 點的兩邊各截下一小段弧，其長各爲 η。由這兩段弧所成的線路記爲 L_1，$L-L_1=$ $=L_2$，記(165)式兩積分之差爲 Δ，則有：

$$(166)\qquad \Delta=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}\cdot\frac{z-\xi}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}\cdot\frac{z-\xi}{\tau-z}d\tau,$$

設 z 沿 L 的法線趨向極限 ξ。這時 z 和 ξ 的距離就小於 z 和 L 上其他諸點的距離，即 $|z-\xi|\leqslant$ $\leqslant|\tau-z|$，此外，由 $\tau(s)=x(s)+iy(s)$ 有 $d\tau=[x'(s)+iy'(s)]ds$ 和 $|x'(s)+iy'(s)|=1$。用通常的方法估計(166)式的第一個積分，得：

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}\cdot\frac{z-\xi}{\tau-z}d\tau\right|\leqslant\frac{k}{2\pi}\int_{s_0-\eta}^{s_0+\eta}\frac{ds}{|\tau(s)-\tau(s_0)|^{1-\alpha}},$$

其中 $s=s_0$ 對應於 $\tau=\xi$ 點。因爲弦長 $|\tau(s)-\tau(s_0)|$ 和弧長 $|s-s_0|$ 的比趨向極限 1，可知上式後面的積分爲收斂。因此對任一已給正數 ε，可取 η 如此之小，使沿 L_1 的積分的模小於 $\frac{\varepsilon}{2}$。這樣固定了 η 之後，沿 L_2 的就是一個常義積分，其中 $|\tau-\xi|$ 和 $|\tau-z|$ 都大於某一固定的正數。因此對於所有和 ξ 相當接近的 z，可使這積分的模小於 $\frac{\varepsilon}{2}$。但 ε 是任意的，故(166)式中的 Δ 趨向零，當 z 沿法線趨向 ξ 時。即：

$$\lim_{z\to\xi}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}d\tau$$

或由(162)：

$$\lim_{z\to\xi}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau-\frac{1}{2}\omega(\xi)\text{。}$$

由(164)式卽得所需的結果：

$$\lim_{z\to\xi}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2}\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau。\tag{167}$$

當 z 從 L 外部趨向 ξ 時，證明幾乎完全一樣，但須注意：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-z}=\begin{cases}1 \text{ 若 } z \text{ 在 } L \text{ 之內}\\ 0 \text{ 若 } z \text{ 在 } L \text{ 之外}\end{cases}\tag{168}$$

直到現在我們都假設 z 沿法線趨向 ξ。可以證明當 z 以任意方式趨向 ξ 時 (167) 式仍舊成立。爲此祇需證明當 z 沿法線趨向 L 上的極限點，而積分(161)趨向極限(163)時關於 L 上的點 ξ 是一致的。現在祇看 L 爲圓周 $|z|=1$ 的情形。首先仍設 z 沿法線趨向 ξ。這時 $\tau=e^{i\varphi}$；$\xi=e^{i\varphi_0}$ 及 $ds=d\varphi$。不難證明若 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，則 $\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x$。由此可知

$$|\tau-\xi|=2\sin\frac{|\varphi-\varphi_0|}{2}\geqslant\frac{2}{\pi}|\varphi-\varphi_0|,\qquad(|\varphi-\varphi_0|<\pi)$$

故沿 L_1 的積分的模小於：

$$\frac{k}{2\pi}\int_{\varphi_0-\eta}^{\varphi_0+\eta}\frac{\pi^{1-\alpha}d\varphi}{2^{1-\alpha}|\varphi-\varphi_0|^{1-\alpha}}=\frac{k}{2^{1-\alpha}\pi^{\alpha}}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\eta}\frac{d\varphi}{(\varphi-\varphi_0)^{1-\alpha}}=\frac{k\eta^{\alpha}}{2^{1-\alpha}\pi^{\alpha}\alpha}$$

在 L_2 上若 z 相當接近於 ξ，則得：

$$|\tau-\xi|>\frac{1}{2}\sin\eta;\quad|\tau-z|>\frac{1}{2}\sin\eta;\quad|\omega(\tau)-\omega(\xi)|\leqslant 2M,$$

這裏 M 是 $|\omega(\tau)|$ 在 L 上的最大值。設 $\delta=|z-\xi|$，得

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\omega(\tau)-\omega(\xi)}{\tau-\xi}\cdot\frac{z-\xi}{\tau-z}d\tau\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{8M\delta}{\sin^2\eta}(2\pi-2\eta)\leqslant\frac{8M\delta}{\sin^2\eta}。$$

所以最後：

$$|\Delta|\leqslant\frac{k\eta^{\alpha}}{2^{1-\alpha}\pi^{\alpha}\alpha}+\frac{8M}{\sin^2\eta}\delta。$$

先取 η 如此小，使上式右邊第一項小於 $\frac{\varepsilon}{2}$，η 固定以後，再取 $\delta<(\varepsilon\sin^2\eta):(16M)$，則第二項也小於 $\frac{\varepsilon}{2}$。在這估值中沒有 ξ，因此當 z 沿法線趨向圓周時，(166)式中的 Δ 趨向零，關於 ξ 是一致的。從而(167)式中的極限法也一致地關於 ξ 成立。由此可知(167)式右邊和(161)式的積分都是 ξ 的連續函數[I, 145]。在[26]中我們已證過，這函數滿足黎浦希茲條件。

記 (167) 式右邊爲 $\omega_1(\xi)$，並且設 z 以任意方式趨向極限 ξ。設 ξ' 爲圓周上的變動點，他常和 z 在同一半徑上。顯然有 $\xi'\to\xi$ 及 $|z-\xi'|\to 0$。應用前面已證關於(167)式中極限法的一致性，可知對任一已給的正數 ε 以及所有和 ξ 相當接近的 z，有：

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-z}d\tau-\omega_1(\xi')\right|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

另一方面，對所有和 ξ 相當接近的 z，由 $\omega_1(\xi)$ 的連續性有 $|\omega_1(\xi)-\omega_1(\xi')|<\frac{\varepsilon}{2}$，因此，對所有

和 ξ 相當接近的 z,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-z}\,d\tau-\omega_1(\xi)\right|<\varepsilon。$$

因爲 ξ 是 L 上任意一點,這就證明(167)式中的極限法對於以任意方式由內部趨向 ξ 的 z 都成立,並且關於 ξ 是一致的。換句話說,由積分(161)在圓周內部所定義的 $F(z)$ 是其中的連續函數,直到圓周之上仍爲連續。這時他在圓周上的極限值由(167)式決定。當 z 從圓的外部趨向圓周時一樣可以證明我們所需的結果。

勾犀型積分的這種性質對於參變函數 $x(s)$ 和 $y(s)$ 滿足[27]中的假設的任一閉線路 L 也一樣可以證明,並且即使 L 有有限個角點也無妨。設 M 是 L 的一個角點,當沿 L 逆時針方向進行時切線在 M 點轉了一個角度 $\pi\theta$, 其中 $-1<\theta<+1$。這時不難知道在(156)式右邊不是 πi 而是 $(1-\theta)\pi i$, 從而在M點代替(163)式應有:

$$\pm\frac{1\pm\theta}{2}\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau^{❶},$$

這裏第一項中應同時取正號或同時取負號。

若以 $F_i(\xi)$和 $F_e(\xi)$表示(161)式在 L 內部和 L 外部所定義的函數在 L 上的極限值,則由前面已證明的定理,可寫:

$$F_i(\xi)=\frac{1}{2}\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau,$$
(169)
$$F_e(\xi)=-\frac{1}{2}\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau。$$

對非閉線路可以證明完全類似的定理。現在祇看實軸上的有限線段(a,b):

(170)
$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-z}dt。$$

若 $\omega(t)$ 恆等於 1, 則代替(168)應有:

(171)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{b-z}{a-z},$$

其中對數的值應如此選取,使在 $z=\infty$ 點爲零。若 ξ 在線段(a, b)之內,則代替(156)式應有:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{dt}{t-\xi}=\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{b-\xi}{\xi-a},$$

其中對數取實值。逐字重複以前的理論,可得:

$$\lim_{z\to\xi}\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-z}dt=\frac{\omega(\xi)}{2\pi i}\left[\lg\frac{b-z}{a-z}\bigg|_{z\to\xi}-\lg\frac{b-\xi}{\xi-a}\right]+\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-\xi}dt。$$

當 z 從線段(a, b)以上或以下趨向 ξ 時,函數(171)有不同的極限值,即

❶普里瓦洛夫,蘇聯科學院報告,23卷9期。

$$\lg\frac{b-z}{a-z}\Big|_{z\to\xi}=\lg\frac{b-\xi}{\xi-a}\pm\pi i,$$

這裏當 z 從實軸以上趨向 ξ 時取(+)號,從實軸以下趨向 ξ 時取(−)號。當積分路線從 a 到 b 時上半平面在他的左邊,因此 z 從上面趨向 ξ 恰如在閉曲線的情形 z 從內部趨向曲線上的點一般。同樣,z 從下面趨向 ξ 恰如 z 從閉曲線的外部趨向曲線上的點一般。設以 $F_i(\xi)$ 和 $F_e(\xi)$ 表示當 z 依上述兩種方式趨向 ξ 時函數 (170) 的極限值,和 (169) 兩式類似,可得:

$$F_i(\xi)=\frac{1}{2}\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-\xi}\,dt,$$

(172)

$$F_e(\xi)=-\frac{1}{2}\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\omega(t)}{t-\xi}\,dt\ 。$$

若 $\omega(t)$ 在線段 $(a,\ b)$ 上滿足[27]最後面所說的條件,又在端點鄰近呈(160)的形式,則對所有和線段端點相當接近的點 z,下面的命題成立(參看模斯舍李舒維爾的書)。

1．若 $\gamma=0$,則

$$F(z)=\pm\frac{\omega(c)}{2\pi i}\lg\frac{1}{z-c}+F_0(z),$$

這裏當 $c=a$ 時取(+)號,當 $c=b$ 時取(−)號。又 $F_0(z)$ 爲有界函數,當 $z\to c$ 時有一定的極限值。$\lg(z-c)$ 可取在帶有割線 $(a,\ b)$ 的平面上 $z=c$ 點鄰近爲單值的任一支頁。

2．若 $\gamma=\gamma_1+i\gamma_2\neq0$,則

$$F(z)=\pm\frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\omega^*(c)}{(z-c)^\gamma}+F_0(z),$$

這裏正負號的取法如前,$(z-c)^\gamma$ 可取在帶有割線 $(a,\ b)$ 的平面上 $z=c$ 點鄰近爲單值的那一支頁,他在割線的上(左)岸取 160)式中 $(t-c)^\gamma$ 所取的數值。進之,$F_0(z)$ 具有下面的性質:若 $\gamma_1=0$,則 $F_0(z)$ 有界,且當 $z\to0$ 時有一定的極限值;但若 $\gamma_1>0$,則

$$|F_0(z)|<\frac{c}{|z-c|^{\gamma_0}},$$

其中 c 和 γ_0 是常數,而 $\gamma_0<1$。應用勒貝格積分的概念,可以對任一可和函數 $\omega(t)$ 及更一般的線路來研究勾犀型積分的值(參看普里瓦洛夫"勾犀積分",1918)。

注意一個特別情形。若 $\omega(\tau)$ 是某一在閉線路 L 的內部爲正則,直到 L 爲連續的函數在 L 上的極限值,又 $\omega(\tau)$ 滿足黎浦希茲條件,則 $F_i(\xi)=\omega(\xi)$,而 (169) 的第一式表明 $\omega(\tau)$ 應該是第二類齊次積分方程:

$$\omega(\xi)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau \tag{173}$$

的解。如前設 L 爲單閉曲線。積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau \tag{174}$$

的主值將任一已給在 L 上滿足黎浦希茲條件的函數 $\omega(\tau)$ 變為另一函數 $\omega_1(\xi)$，在 L 上定義且亦滿足黎浦希茲條件。換句話說，積分(174)可視爲施於函數 $\omega(\tau)$ 上的一種變換或運算。對如此得到的函數 $\omega_1(\xi)$ 我們可以再施行一次這種具勾摩核的運算。這時成立下面的公式：

(175)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{\xi-\eta}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\right]d\xi=\frac{1}{4}\omega(\eta)。$$

換句話說，施行兩次具勾摩核的變換以後，我們仍舊得到始函數 $\omega(\tau)$，但帶有係數 $\frac{1}{4}$。要證明(175)式，可將(169)的第一式改寫爲：

(176)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau=F_i(\xi)-\frac{1}{2}\omega(\xi)。$$

上式右邊表示對函數 $\omega(\tau)$ 施行一次具勾摩核的變換所得的結果。現在再對上式右邊施行一次具勾摩核的變換，得：

(177)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_i(\xi)-\frac{1}{2}\omega(\xi)}{\xi-\eta}\,d\xi,$$

這裏 η 是 L 上的點，並且如前積分是取主值。因爲 $F_i(\xi)$ 表示 L 內部的正則函數在 L 上的極限值，由(173)應有：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_i(\xi)}{\xi-\eta}\,d\xi=\frac{1}{2}F_i(\eta),$$

另一方面，由(176)：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\frac{1}{2}\omega(\xi)}{\xi-\eta}\,d\xi=\frac{1}{2}F_i(\eta)-\frac{1}{4}\omega(\eta),$$

因此最後積分(177)等於 $\omega(\eta):4$，即(175)的公式成立。

第二章　保角變換和平面場

29. 保角變換　在這一章裏面我們要看看複變數函數論在平面流體力學，靜電學和彈性學上的一些應用。因為保角變換在這方面最常被用到，所以我們先來仔細研究研究他。關於正則變換的基本性質，我們已在[3]和[20]中說過一些。在導數不等於零的點和導數等於零的點，這種變換的性質是有不同的。在第一種點的地方角度保持不變，而如[23]所述，在第二種點的地方角度經變換後增大。今設

$$w=f(z) \tag{1}$$

為正則函數，將區域 B 保角地變換為區域 B_1。若 $f'(z)$ 在 B 中無零點，則 B_1 無支點，但仍可能為多葉的，卽可能自己重疊。設 l 為區域 B 中一曲線，$\varphi(s)$ 為 l 上所定義的函數，試看線積分

$$\int_l \varphi(s)ds,$$

這裏 ds 是曲線 l 的單元。經過變換(1)以後，l 變為 B_1 中之曲線 l_1，而 l_1 的單元 $ds_1=|f'(z)|ds$，因為 $|f'(z)|$ 表示線性度量經過變換 $f(z)$ 以後所起的變化[3]。

設(1)式的反函數是

$$z=F(w), \tag{2}$$

則顯有 $F'(w)=\dfrac{1}{f'(z)}$，因之可寫 $ds=|F'(w)|ds_1$，而前面的線積分經過這變換後就成為：

$$\int_l \varphi(s)ds=\int_{l_1}\varphi_1(s_1)|F'(w)|ds_1\,。 \tag{3}$$

同樣的，因為 $|f'(z)|^2$ 表示面積度量經過保角變換 $f(z)$ 以後所起的變化，對於二重積分我們就有下面的公式：

(4) $$\iint\limits_{B}\varphi(z)d\sigma=\iint\limits_{B_1}\varphi_1(w)\,|F'(w)|^2d\sigma_1,$$

而對於面積單元則有下式：

(5) $$d\sigma_1=|f'(z)|^2d\sigma。$$

設將(1)式分開成實數部分和虛數部分：

(6) $$w=f(z)=u(x,\,y)+iv(x,\,y),$$

則易知 $|f'(z)|^2$ 等於函數 $u(x,\,y)$ 和 $v(x,\,y)$ 關於變數 x 和 y 的函數行列式。實際上，這行列式就是：

$$\frac{D(u,\,v)}{D(x,\,y)}=\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x},$$

或由勾犀黎曼方程

$$\frac{D(u,\,v)}{D(x,\,y)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

而這恰好就等於導數 $f'(z)$ 的模的平方

$$|f'(z)|^2=\left|\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2。$$

現在看 $z=x+iy$ 平面上的兩個曲線族：

(7) $$u(x,\,y)=C_1;\quad v(x,\,y)=C_2,$$

這裏 C_1 和 C_2 是任意常數。在 $w=u+iv$ 平面上他們對應於平行於坐標軸的直線 $u=C_1$ 和 $v=C_2$，故藉變換(2)可由平行於坐標軸的直線網得到曲線族(7)。由此可知(7)中任二不屬於同一族的曲線必定互相正交，除了在使 $f'(z)$ 爲零的點以外。反之，若於方程

$$u=u(x,\,y);\quad v=v(x,\,y)$$

的右邊設 $x=C_1$ 或 $y=C_2$，C_1 和 C_2 爲任意常數，則在 $w=u+iv$ 平面上得到兩個互相正交的曲線族。這種曲線網係由 z 平面上平行於坐標軸的直線網藉變換(1)而得到的。這兩個網通常稱爲等溫網，在以後

的討論中將佔很重要的地位。現在來解釋一下這樣定名的理由。我們知道一個正則函數的實數部分 $u(x, y)$（或虛數部分）應該滿足拉普拉斯方程[2]：

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}=0 。$$

但在穩定熱流的理論中[II, 117]，溫度也滿足這個方程，那時我們假定是平面熱流，卽溫度 u 不依賴於某一坐標時的情形。這樣把函數 $u(x, y)$ 當做熱流中的溫度看，(7)式第一個曲線族就是等溫曲線族，而這也就是等溫網這個名詞的來由。(7)式中的第二個曲線族和第一個曲線族正交，乃是我們在 [II, 117] 中稱爲熱流向量所成的向量曲線族。

在變換(1)之下，兩曲線 $u(x, y)=u_0$ 和 $u(x, y)=u_1$ 變爲平行於坐標軸 $u=0$ 的直線 $u=u_0$ 和 $u=u_1$，而兩曲線之間的區域 B 則變爲兩直線之間的帶域。由等溫網中四條曲線所圍成的彎曲四邊形經變換(1)以後成爲一長方形，由平行於坐標軸的四直線

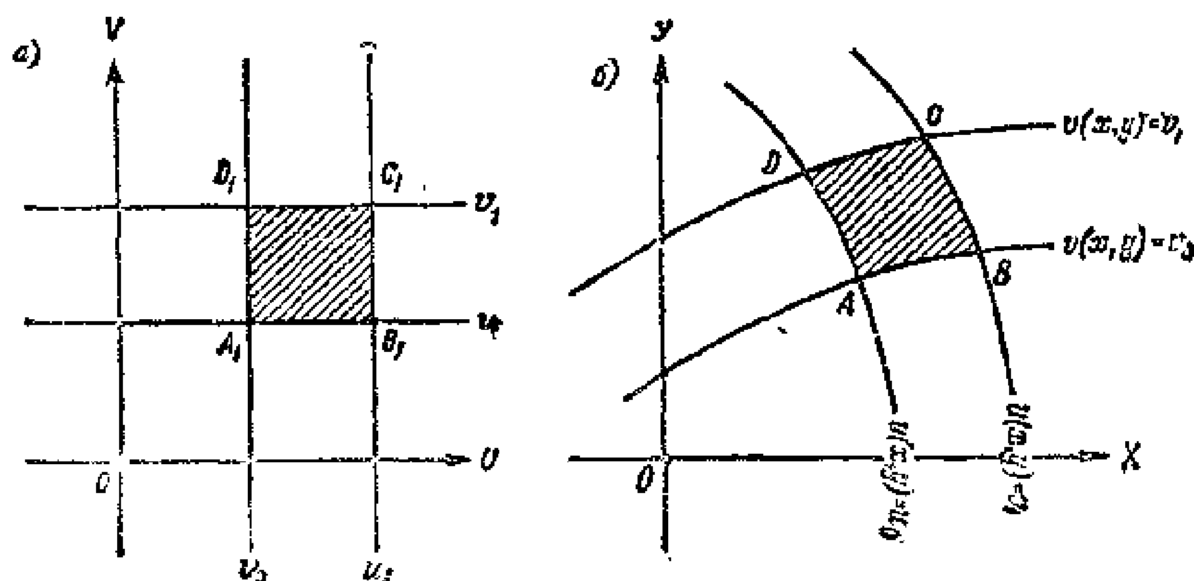


圖 20

$$u=u_0;\ u=u_1;\ v=v_0;\ v=v_1$$

所圍成(圖 26)。

在舉實例以前,對於保角變換還有一點要說的,就是由正則函數 $f(z)$ 所產生的變換,在導數不等於零的點不但角度的大小不變,並且方向也不變。但有時我們也要遇到一種保持角度的大小而變換其方向的保角變換,通常稱爲第二類保角變換的。例如關於實軸的對稱變換顯然是第二類保角變換(圖 27)。這變換可寫爲 $w=\bar{z}$。一般,若 $f(z)$ 是區域 B 中的正則函數,則

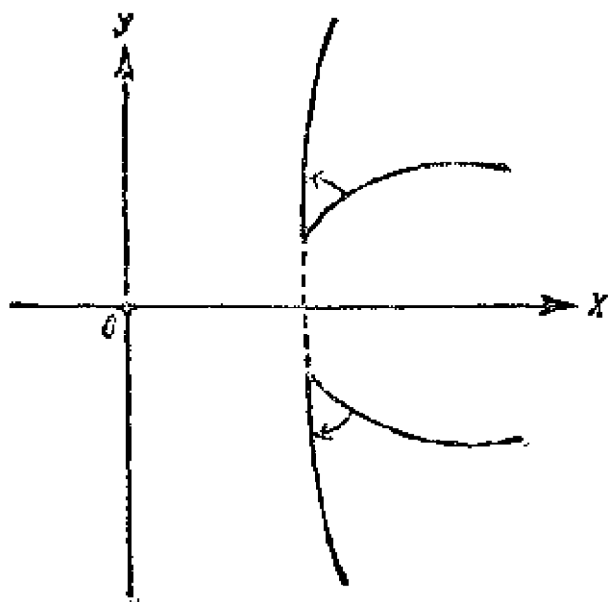


圖 27

$$(8)\qquad w=f(\bar{z})$$

是在和 B 關於實軸爲對稱的區域 B_1 中所定義的第二類保角變換。事實上,由 z 到 $\bar{z}$ 時,B 變爲 B_1,變換保持角度的大小而變其方向。由 $\bar{z}$ 到 $f(\bar{z})$ 的變換則同時保持角度的大小和方向,因此結果所得由 z 到 w 的變換是第二類保角變換。

30. 綫性變換 現在舉一個保角變換最簡單的例子,即綫性函數

$$(9)\qquad w=az+b\qquad (a\neq 0)$$

由此

$$z=\frac{1}{a}w-\frac{b}{a}。$$

這函數將全平面連無限遠點在内變爲他自己,且無限遠點仍變爲無限遠點。特別當 $a=1$ 時,函數 $w=z+b$ 表示全平面沿着從原點到複數 b 的向量的平行移動。另一特別情形是 $b=0$, $a=e^{i\psi}$ (ψ 爲一實數),

函數 $w=e^{i\psi}z$ 表示將 z 的輻角增加一個角度 ψ，而這顯然就是將全平面繞着原點轉一角度 ψ。一般，平面作爲一個整體的運動可由旋轉和平行移動合併得之：

$$w=e^{i\psi}z+b。\tag{10}$$

若 $a=e^{i\psi}\neq 1$，卽變換不是純粹的平行移動，則由(10)式不難決定這變換之下的不變點。這種點的坐標應滿足方程

$$z_0=e^{i\psi}z_0+b,$$

因此
$$z_0=\frac{b}{1-e^{i\psi}}。$$

易證變換(10)可寫成下面的形式：

$$w-z_0=e^{i\psi}(z-z_0),$$

卽一般的平面運動(10)可看做這平面繞着 z_0 這點旋轉角度 ψ。注意：無限遠點也是變換(10)之下的不變點。

現在再看線性變換(9)中係數 a 的模不等於1的情形。當 $b=0$ 時，設 a 的模爲 ρ，輻角爲 ψ，則

$$w=\rho e^{i\psi}z。$$

這變換將從原點到 z 點的向量放大 ρ 倍，再將全平面繞着原點旋轉角度 ψ。這種變換稱爲以原點爲相似中心，以 ρ 爲相似係數的相似變換。

一般，若線性變換(9)中 $a\neq 1$，則不變點應滿足方程：

$$z_0=az_0+b,\ 卽\ z_0=\frac{b}{1-a},$$

易證(9)式可以改寫爲：

$$w-z_0=a(z-z_0),$$

顯然，這也是一個相似變換，不過相似中心不是原點而是 z_0。讀者試證這時等溫網是兩平行直線族。

31. 分式線性變換 所謂分式線性變換就是一個可以寫成二線性函數的商的變換：

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{11}$$

這裏應設 $ad-bc\neq 0$，否則上式右邊的分式就可簡約而成一個常數了。關於 z 解(11)式，即得這變換的逆，他也是一個分式線性變換

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a}。 \tag{12}$$

對 z 平面上每一點在 w 平面上都有其一定的對應點，反之對 w 平面上每一點在 z 平面上也有一定的對應點，故變換(11)將全平面包括無限遠點在內變為他自己。

若在(11)式中 $c=0$，則得線性變換。除此情形外，$z=\infty$ 變為 $w=\frac{a}{c}$，而 $z=-\frac{d}{c}$ 變為 $w=\infty$，故一般在分式線性變換之下，無限遠點不是不變點。

現在證明分式線性變換的一個基本性質，即此變換常把圓變成圓。注意：我們這裏及以後所指的圓除了普通的圓以外，還包括直線在內。對於線性變換，他或表全平面的運動，或表相似變換，上述性質當然滿足，因為在線性變換之下，直線變為直線，普通的圓變為普通的圓。在證明分式線性變換有這性質以前，先將他的形式變更一下。設 $c\neq 0$，在(11)式中以分母除分子後，可改寫為：

$$w=e+\frac{f}{z+\frac{d}{c}},$$

其中

$$e=\frac{a}{c}, \quad f=\frac{bc-ad}{c^2}。$$

所以變換(11)可由平行移動 $w_1=z+\frac{d}{c}$，變換 $w_2=\frac{f}{w_1}$ 及平行移

動 $w=w_2+e$ 合併而成。這樣只須證明形式爲

(13) $$w=\frac{\gamma}{z}$$

的變換把圓變爲圓就夠了。圓的方程是：

$$A(x^2+y^2)+2Bx+2Cy+D=0_{\circ}$$

當 $A=0$ 時就成了直線。這方程又可寫爲：

(14) $$Az\bar{z}+\delta\bar{z}+\bar{\delta}z+D=0_{\circ}$$

其中 $\delta=B+iC$，$\bar{z}$ 和 $\bar{\delta}$ 是 z 和 δ 的共軛複數。今設 z 平面上有一圓 l，要得到 l 在 w 平面上的像 l_1 的方程，只須由(13)式求出 z 來代入(14)式卽可。由此易知 l_1 的方程爲：

$$A\gamma\gamma+\delta\gamma w+\bar{\delta}\gamma\bar{w}+Dw\bar{w}=0,$$

這方程的形式和(14)式相同，故 l_1 亦爲一圓（或直線）。因此得證：形式(11)的變換常把圓變做圓（直線是經過無限遠點的圓）。

今設 l 和 l_1 都是普通的圓。由[22]可知若 l 上的正方向對應於 l_1 上的正方向，則變換(11)把 l 的內部變成 l_1 的內部，l 的外部變成 l_1 的外部。但若 l 上的正方向對應於 l_1 上的負方向，則變換(11)把 l 的內部變成 l_1 的外部，l 的外部變成 l_1 的內部。若兩圓中有一是直線或都是直線，要決定兩平面中互相對應的區域，只須決定直線上和圓上，或兩直線上互相對應的方向，那末當觀察者在其上依照對應方向前進時，在他同一邊（左或右）的區域就在變換(11)之下互相對應。

又設有關於圓 l 爲對稱的兩點 A_1 和 A_2，經變換後得到圓 l_1 和兩點 B_1 與 B_2。則可證 B_1 和 B_2 關於 l_1 亦爲對稱。實則我們由[24]知道經過 A_1 和 A_2 的任一圓必和 l 正交。由於保角性可知經過 B_1 和 B_2 的任一圓亦必與 l_1 正交，而這就是 B_1 和 B_2 關於 l_1 爲對稱的特徵。因此得證：若變換(11)把圓 l 變成圓 l_1，則關於 l 爲對稱的點必變成關於

l_1爲對稱的點。注意：這時圓心和無限遠點關於圓爲對稱，而經過這兩點的圓束實際上就是經過圓心的直線束，其中任一直線當然和這圓正交。

若 a 和 c 都不爲零，變換(11)可以改寫爲下之形式：

$$w=k\frac{z-\alpha}{z-\beta}\text{。}\qquad\left(k=\frac{a}{c}\right)\tag{15}$$

這裏 α 和 β 有簡單的幾何意義，卽 $z=\alpha$ 變成 $w=0$，$z=\beta$ 變成 $w=\infty$。

現在看 w 平面上所有以原點爲中心的同心圓。其方程爲 $|w|=C$，$w=0$ 和 $w=\infty$ 關於每一個這種圓都是對稱點。因此知道在 z 平面中 $z=\alpha$ 和 $z=\beta$ 關於這些圓的像是對稱點。像的方程顯見爲：

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right|=C\text{，}\tag{16}$$

其中 C 是任意常數。所以方程(16)表示一個圓族，α 和 β 關於其中每一圓都是對稱點（圖28）。線段 $\overline{\alpha\beta}$ 的垂直二等分線顯然也屬於這圓族之中。再看 w 平面上所有經過原點的直線，換言之，卽經過 $w=0$ 和 $w=\infty$ 的圓束。這圓束的方程爲 $\arg w=C$。在 z 平面上和這圓束對應的是經過 α 和 β 的圓束，其方程爲（因 k 的輻角爲常數）：

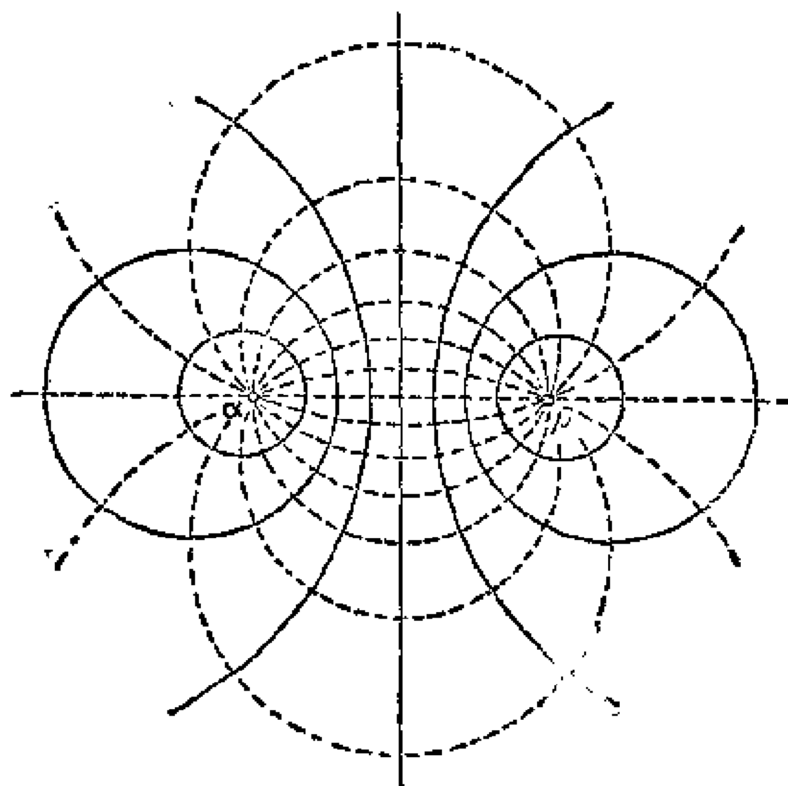


圖 28

(17) $$\arg\frac{z-\alpha}{z-\beta}=C_1。$$

所以(17)式表示 z 平面上經過 α 和 β 兩點的圓束。(16)中任一圓和(17)中任一圓相交於直角(圖 28)。

由定義，z 平面上的等溫網對應於 w 平面上兩族平行於坐標軸的直線。每一族直線都可以看做以無限遠點爲公共切點的圓束，所以他們對應於 z 平面上以 $z=-\frac{d}{c}$ 爲公共切點的圓束。故知 z 平面上的等溫網是由兩個圓束所組成，屬於同束之任意兩圓必在 $z=-\frac{d}{c}$ 點相切，不屬於同一束的任意兩圓在 $z=-\frac{d}{c}$ 點相交於直角(圖 29)。如果(11)中的係數皆爲已知時，則兩個圓束的方程可以準確求得。

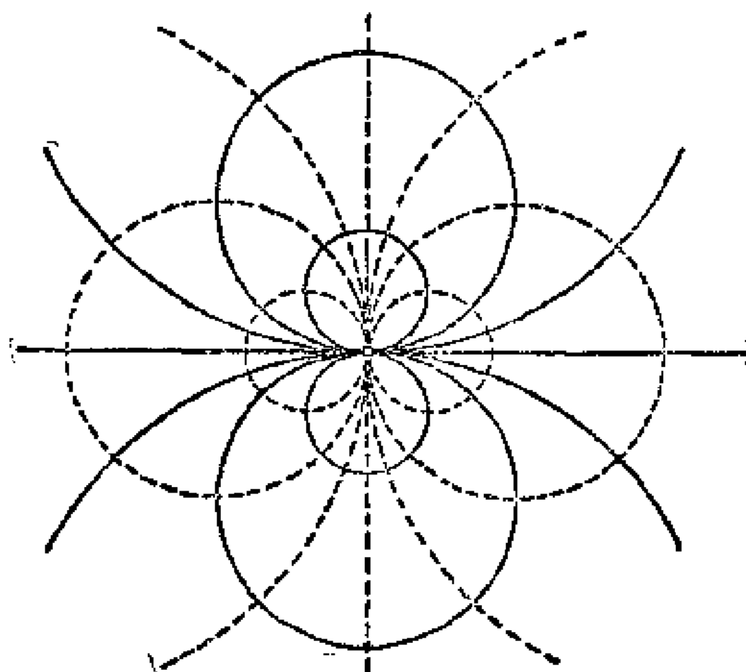


圖 29

變換(11)中含有三個任意複參數，即係數 a,b,c,d 中的任三個和第四個的比值。因此如果已給適當的補充條件，便可完全決定變換(11)。例如可以要求 z 平面上三定點 z_1,z_2,z_3 變成 w 平面上三定點 w_1,w_2,w_3。不難證明滿足這條件的分式線性變換是：

(18) $$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}。$$

實際上,將上式依 w 解之,即得形式如(11)的分式線性變換。又以 $z=z_1$ 和 $w=w_1$ 代入(18)式,兩邊都等於零;以 $z=z_3$ 和 $w=w_3$ 代入,兩邊都等於一;以 $z=z_2$ 和 $w=w_2$ 代入,兩邊都等於 ∞。由此可知這變換確是滿足已給的條件。易證上述條件所決定的分式線性變換是唯一的。在這變換之下,顯然由 z_1, z_2, z_3 三點所決定的圓被變爲由 w_1, w_2, w_3 三點所決定的圓。如果六點同在一圓周上,則此分式線性變換把這圓變爲他自己。又若三點 z_1, z_2, z_3 所定圓周上的方向和三點 w_1, w_2, w_3 所定圓周上的方向相同,則在此分式線性變換之下,圓的內部仍舊變爲圓的內部。

今試以上半平面爲例。他的境界是實軸,他的內點滿足一個條件,即其坐標的虛數部分的係數常爲正。將上半平面變爲他自己的分式線性變換應該將實軸也變爲實軸,即當 z 爲實數時 w 也應爲實數。故由(11)式知可設四個係數 a, b, c, d 都是實數。此外,當 z 在實軸上沿正方向移動時,w 也應在實軸上沿正方向移動,否則上半 z 平面就會變爲下半 w 平面了。

以 $z=x+iy$ 代入(11)式得:

$$w=\frac{(ax+b)+iay}{(cx+d)+icy},$$

或分開實數和虛數部分:

$$w=u+iv=\frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2}{(cx+d)^2+c^2y^2}+i\frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+c^2y^2}。$$

由此顯見當 $y>0$ 時要 $v>0$, 必須

$$ad-bc>0。\tag{19}$$

故得證: 一般將上半平面變爲他自己的分式線性變換(11)中的係數須是實數,並且滿足條件(19)。

同樣方法可用來研究將單位圓變爲他自己的變換。所謂單位圓即

以原點爲中心，半徑等於 1 的圓，其方程可寫作 $|z|\leqslant 1$。首先，我們敍述關於單位圓圓周 C 爲對稱的點的幾個簡單性質。

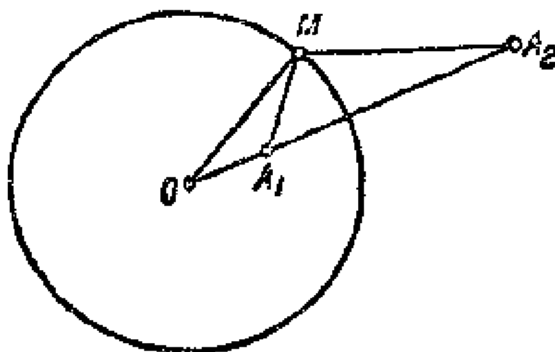


圖 30

設 A_1 和 A_2 是一對關於單位圓圓周爲對稱的點。M 爲圓周 C 上任意一點。則有 $\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}=\overline{OM}^2$，或可改寫爲(圖 30)：

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OM}}=\frac{\overline{OM}}{\overline{OA_2}}。$$

由此可知三角形 OA_1M 和 OA_2M 有一公共角 A_1OM，並且夾這角的兩邊成比例，故爲相似三角形。所以

$$\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MA_2}}=\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OM}}。\tag{20}$$

設 A_1 的坐標爲 α，又 $\alpha=\rho e^{i\varphi}$，易知 A_2 的坐標爲 $\beta=\frac{1}{\rho}e^{i\varphi}$，或可寫做 $\beta=\frac{1}{\bar{\alpha}}$。我們要做一個分式線性變換，將單位圓變爲他自己，而 α 變爲原點。這變換應該把 β 變爲無限遠點，卽應具下面的形式：

$$w=k\frac{z-\alpha}{z-\beta}\tag{21}$$

或由 $\beta=\frac{1}{\bar{\alpha}}$，

$$w=k\frac{\bar{\alpha}(z-\alpha)}{\bar{\alpha}z-1},\tag{22}$$

這裏 k 是一個常數因子，其形式可由下面的條件來決定，卽：(21) 式右邊當 z 在圓周 C 上時其模應等於 1，就是說

$$|k|\frac{|z-\alpha|}{|z-\beta|}=1\quad 當\quad |z|=1。$$

但由(20)顯見：

$$\frac{|z-\alpha|}{|z-\beta|}=\frac{|\alpha|}{1},$$

由此知$|k\alpha|=1$。回到(22)式,知道 $k\bar{\alpha}$ 的模應該等於 1,即應有 $k\bar{\alpha}=e^{i\psi}$,ψ 爲任意實數。這樣我們所需要的變換可知爲

$$w=e^{i\psi}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}, \tag{23}$$

其中 ψ 爲任意實參數,α 爲單位圓內部任意一點。特別,若 $\alpha=0$,即原點變爲原點,變換公式爲 $w=e^{i(\psi+\pi)}z$,即將單位圓繞着原點旋轉角度$(\psi+\pi)$。一般,變換(23)可分開成兩部分,即先有變換

$$w=\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}, \tag{24}$$

將單位圓變爲他自己,α 點變成原點;然後再繞着原點旋轉角度 ψ。

我們也可以做出無限多個變換來,每一個都將一圓 K_1 變成另一圓 K_2。這祇須先做一個把 K_1 變成 K_2 的變換,然後再做一個如上的分式線性變換,把 K_2 變成他自己。後面這種變換有無限個之多。這裏要注意的一點就是:兩個分式線性變換連續施行的結果等於施行一個分式線性變換。實際上,假設我們先用分式線性變換(11)把 z 變成 w,然後再用分式線性變換

$$w_1=\frac{a_1w+b_1}{c_1w+d_1} \tag{25}$$

把 w 變成 w_1。將(11)式中的 w 代入(25)式,經過簡單的計算後,即得將 z 變成 w_1 的分式線性變換:

$$w_1=\frac{(a_1a+b_1c)z+(a_1b+b_1d)}{(c_1a+d_1c)z+(c_1b+d_1d)}。$$

這變換通常稱爲(11)和(25)的乘積。注意:一般兩變換的乘積和其因子的次序有關,即和施行這兩個分式線性換變(11)及(25)的次序有關。

現在再做一個分式線性變換，將上半平面變爲單位圓。易見下面就是一個變上半平面爲單位圓的變換：

(26) $$w=\frac{z-i}{z+i}。$$

因爲在這變換之下，上半平面中的 $z=i$ 點變爲 w 平面中的原點，又

$$|w|=\frac{|z-i|}{|z+i|},$$

等式右邊分數的分子表示 z 和 i 的距離，分母表示 z 和 $(-i)$ 的距離，當 z 在實軸上時，兩距離相等，故 $|w|=1$。若在這變換之後再施行任意將單位圓變爲他自己的分式線性變換，卽得一般將上半平面變爲單位圓的分式線性變換。

最後我們證明[24]中所述的一般對稱原理。設函數 $f(z)$ 在圓周 C 上 AB 弧的一邊爲正則，直到 AB 弧爲連續，且將這弧變爲另一圓周 C_1 上的 A_1B_1 弧。作一分式線性變換將 z 平面上的圓周 C 變爲 z_1 平面上的實軸：

$$z_1=\frac{az+b}{cz+d},$$

同樣，再作函數 $f(z)$ 的一個分式線性變換，將圓周 C_1 變爲實軸。這樣就得到一個以 z_1 爲自變數的函數：

$$f_1(z_1)=\frac{a'f(z)+b'}{c'f(z)+d'}。$$

函數 $f_1(z_1)$ 在實軸的一邊爲正則，直到其上某一線段爲連續，且將這線段仍舊變爲實軸上的線段。故由 [24] 中已證明的對稱原理，這函數可以被解析延拓到該線段的另一邊，使在關於實軸爲對稱的點函數值也關於實軸爲對稱，因爲在上述兩個分式線性變換之下，對稱點的像仍爲對稱點，故知函數 $f(z)$ 可被解析延拓到 AB 弧的另一邊，使得關於

圓周 C 為對稱的兩點經變換後成為關於圓周 C_1 為對稱的兩點。

分式線性變換，如我們上面所述，在複變數函數論中具有重要的價值。有時我們用他恰像在解析幾何學中的坐標變換一樣，即在研究某種問題之先，將平面施行一個分式線性變換，使得要研究的問題成為最簡單的形式。例如上面關於對稱原理這段就是一個例子，用了分式線性變換以後，一般對稱原理就簡化而成[24]中已經證明的特別情形了。

設 C 為平面上一圓周或直線，若有一變換將平面上每一點 A 變為他關於 C 的對稱點 A_1，則此變換稱為反射。設 z 為 A 的複坐標，w 為 A_1 的複坐標。又設 C 為圓周，其中心 B 的坐標為 $z=a$，C 的半徑為 R。向量 $\overline{BA}$ 和 $\overline{BA_1}$ 應該有相同的幅角，而其長的乘積等於 R^2。易見由此可得 w 和 z 之間的關係如下：

$$w-a=\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} \tag{27}$$

即關於圓周的反射可用 $\bar{z}$ 的分式線性函數來表示：

$$w=\frac{a\bar{z}+(R^2-a\bar{a})}{\bar{z}-\bar{a}}$$

故這是第二類保角變換。再看關於直線的反射。設此直線通過原點且和實軸正方向成一角度 ψ（圖 31）。此時設 z 點的像為 w，則顯有 $|w|=|z|$ 及 $\arg w=2\psi-\arg z$，即變換方程為：

$$w=e^{i2\psi}\bar{z}, \tag{28}$$

這是 $\bar{z}$ 的簡單線性函數。仿此可求關於平面上任一直線的反射方程。

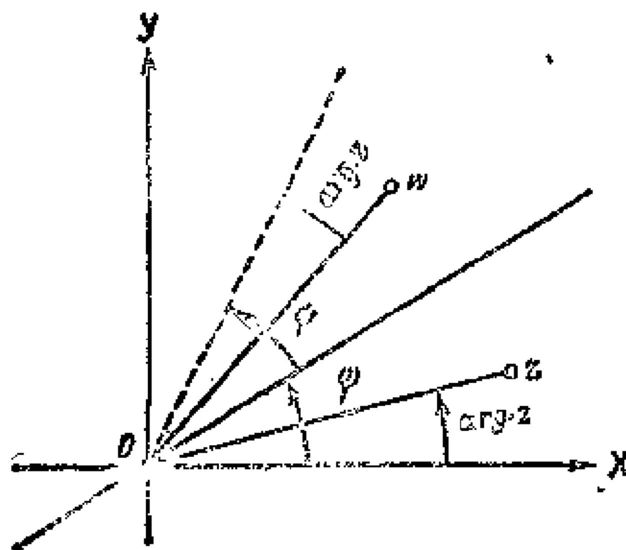


圖 31

若將兩個關於不同圓周或直線的反射相乘,結果得到的是一個分式線性變換。特別設有兩個關於二相交直線的反射相乘,則常可設他們的交點爲原點,ψ_1 和 ψ_2 爲這兩直線和正實軸間的交角。經過兩次反射後,我們依照下面的公式先由 z 得到 w_1,再由 w_1 得到 w:

$$w_1=e^{i2\psi_1}\bar{z};\quad w=e^{i2\psi_2}\bar{w}_1。$$

將 w_1 代入第二式的右邊,卽得由 z 到 w 的變換:

$$w=e^{i2(\psi_2-\psi_1)}z,$$

這表示繞着原點旋轉角度 $2(\psi_2-\psi_1)$,卽關於兩相交直線施行兩次反射的結果等於將全平面繞着這兩直線的交點旋轉兩直線間的交角的二倍。同樣,易知關於兩平行直線施行兩次反射的結果等於一個全平面的平行移動。

32. 函數 $w=z^2$ 我們以前已研究過函數

$$w=z^2 \tag{29}$$

且並知道他將 z 平面變爲 w 平面上的雙葉黎曼曲面而以 $w=0$ 和 $w=\infty$ 爲一階支點。現在要看看 z 平面和 w 平面上的等溫網是什麼形狀的。將(29)式的實數部分和虛數部分分開,得:

$$w=u(x,y)+iv(x,y)=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i2xy。$$

z 平面上的等溫網是兩個等軸雙曲線族(圖 32):

$$x^2-y^2=C_1;\quad 2xy=C_2。$$

再看 w 平面上的等溫網。在

$$u=x^2-y^2;\quad v=2xy$$

之中先置 $x=C_1$ 而消去 y,再置 $y=C_2$ 而消去 x,卽得兩個拋物線族(圖 33):

$$v^2=4C_1^2(C_1^2-u);\quad v^2=4C_2^2(C_2^2+u),$$

他們是 z 平面上兩直線族 $x=C_1$ 和 $y=C_2$ 的像。

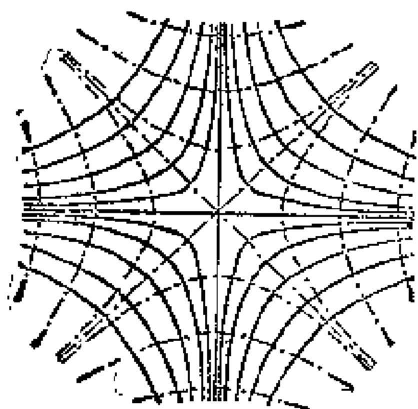


圖 32

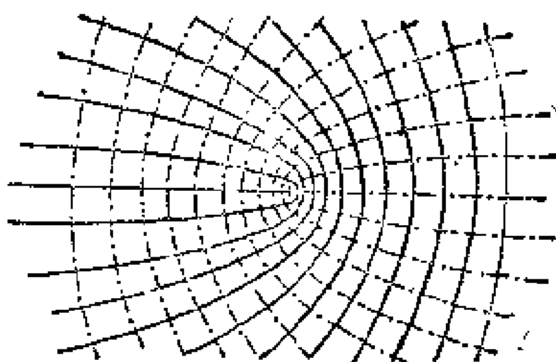


圖 33

我們顯然可將這兩族拋物線所成的等溫網看做函數(29)的反函數 $w=\sqrt{z}$ 在 z 平面上的等溫網。

今在圖 32 中任取一個以虛線表示的等軸雙曲線。假設對於這雙曲線，OX 軸是實軸，則其方程應是 $x^2-y^2=C_1$，其中 C_1 是個正常數。取這雙曲線的右邊一支來。若在方程 $x^2-y^2=C$ 中，C 由 C_1 漸增到 $(+\infty)$，則可得所有用虛線表示，而其右支在 $x^2-y^2=C_1$ 的右支更右邊的雙曲線。由前所述，可知函數(29)把 z 平面上雙曲線 $x^2-y^2=C_1$ 的右支以右的區域保角變換為 w 平面上的半平面 $u\geqslant C_1$。相仿的，這函數也把 z 平面上雙曲線 $x^2-y^2=C_1$ 的左支以左的區域變為 w 平面上的半平面 $u\leqslant C_1$。

再在圖 33 中任取一個以虛線表示的拋物線，其方程為 $v^2=4C_2^2\times$ $\times(C_2^2+u)$，他對應於 z 平面上的直線 $y=C_2$。這裏可設 C_2 為正，因為在拋物線方程中祇出現 C_2^2。若在方程 $v^2=4C^2(C^2+u)$ 中，C 由 C_2 增加到 $(+\infty)$，則得所有用虛線表示而在 $v^2=4C_2^2(C_2^2+u)$ 左邊的拋物線，因此知道函數 $z=\sqrt{w}$ 把 w 平面上拋物線 $v^2=4C_2^2(C_2^2+u)$ 以左的區域保角變換為 z 平面上的半平面 $y\geqslant C_2$。

33. 函數 $w=\frac{k}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 現在看由下面的函數所產生的變換：

(30) $$w=\frac{k}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

這裏 k 是個正數。我們要知道 z 平面上的極坐標網變成什麼，即以原點爲中心的圓 $|z|=\rho$ 和經過原點的直線束 $\arg z=\varphi$ 被(30)變成什麼？以 $z=\rho e^{i\varphi}$ 代入(30)再分開實數和虛數部分，即得：

(31) $$u=\frac{k}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi;\quad v=\frac{k}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi。$$

先求圓 $\rho=\rho_0$ 的像，由(31)式消去 φ 可得

(32) $$\frac{u^2}{\frac{k^2}{4}\left(\rho_0+\frac{1}{\rho_0}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{k^2}{4}\left(\rho_0-\frac{1}{\rho_0}\right)^2}=1,$$

故知這圓的像是 w 平面上的橢圓，其半軸爲：

$$a=\frac{k}{2}\left(\rho_0+\frac{1}{\rho_0}\right);\quad b=\frac{k}{2}\left|\rho_0-\frac{1}{\rho_0}\right|,$$

上面第二式右邊取絕對値，因爲差數 $\rho_0-\frac{1}{\rho_0}$ 可爲正亦可爲負。(31)的兩式當 $\rho=\rho_0$ 時顯然表示這橢圓的參數方程。對於 z 平面上的單位圓 $\rho=1$, (31) 的兩式變爲 $u=k\cos\varphi$ 和 $v=0$, 即橢圓退縮而成實軸上的線段 $(-k,\ +k)$ 重複兩次，或稱爲二重線段。當 ρ 從 1 減少到零時，橢圓無限增大而遮蓋全平面，因此知道 z 平面上單位圓的內部對應於全 w 平面除去割線 $(-k,\ +k)$。同樣，當 ρ 從 1 增加到∞時，橢圓亦無限增大而遮蓋全平面，故 z 平面上單位圓外部也對應於全 w 平面除去割線 $(-k, +k)$。所以整個 z 平面在(30)之下變爲 w 平面上的雙葉黎曼曲面而以 $w=-k$ 和 $w=+k$ 爲支點。對應於此，(30)的反函數：

(30_1) $$z=\frac{w\pm\sqrt{w^2-k^2}}{k}$$

是雙値函數，並且以 $w=k$ 和 $w=-k$ 爲支點。再回到橢圓(31)來。他的兩個焦點是在實軸之上，其橫坐標應該是 $c=\pm\sqrt{a^2-b^2}$, 即：

$$c=\pm\sqrt{\frac{k^2}{4}\left(\rho_0+\frac{1}{\rho_0}\right)^2-\frac{k^2}{4}\left(\rho_0-\frac{1}{\rho_0}\right)^2}=\pm k,$$

故對任何 ρ_0，橢圓的焦點常爲線段 $(-k,\ +k)$ 的端點，換句話說，(32) 所表示的橢圓族是共焦點的。

再看直線 $\varphi=\varphi_0$ 變成什麼。由(31)的兩式消去參數 ρ 得：

$$\frac{u^2}{k^2\cos^2\varphi_0}-\frac{v^2}{k^2\sin^2\varphi_0}=1, \tag{33}$$

是個雙曲線族，半軸 $a=k|\cos\varphi_0|$，$b=k|\sin\varphi_0|$。這些雙曲線的焦點也在實軸上，其橫坐標爲 $c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm k$。所以這雙曲線族和前面的橢圓族也是共焦點的。又由(31)易知對應於 z 平面上的坐標軸

$$\left(\varphi=0,\ \frac{\pi}{2},\pi\text{和}\frac{3\pi}{2}\right),$$

在 w 平面的橢圓退縮爲 $u=0$ 和實軸上的線段 $(-\infty,\ -k)$ 和 $(k,\ +\infty)$。因此最後得到結論，卽：z 平面上的極坐標網在變換(30)之下對應於 w 平面上的共焦點橢圓和雙曲線網，其焦點爲 $\pm k$ (圖 34)。

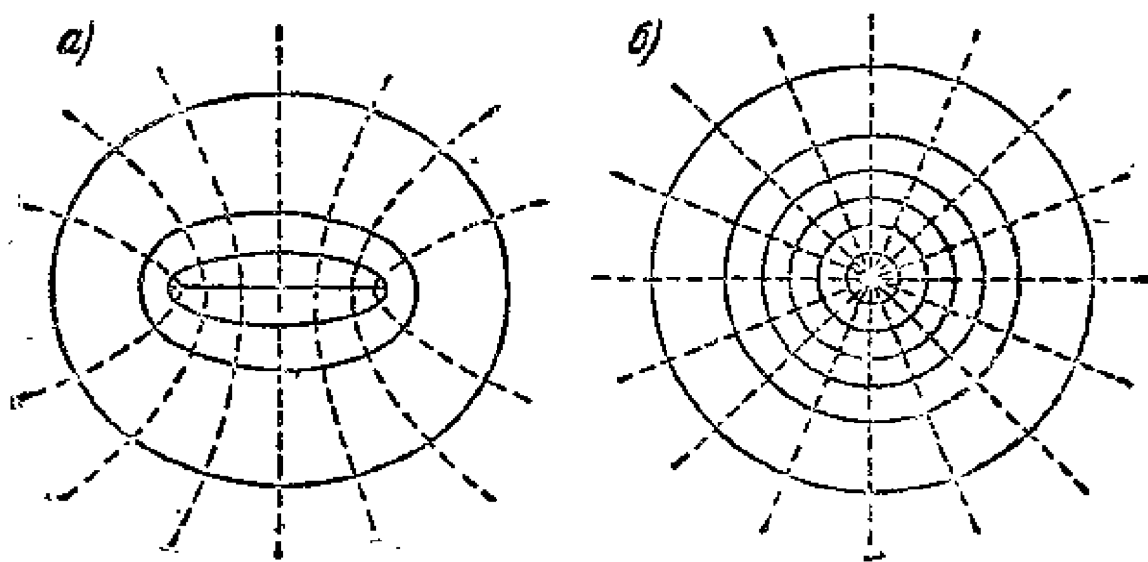


圖 34

不難做一個以共焦點橢圓和雙曲線網作等溫網的函數。祗祇要用

到我們以前已經知道的關於指數函數的知識就夠了[19]。指數函數

$$w=e^z$$

的週期為 $2\pi i$。由公式

$$w=e^x e^{iy}$$

可知直線 $x=x_0$ 被變為中心在原點，半徑為 e^{x_0} 的圓，而直線 $y=y_0$ 被變為經過原點的直線 $\varphi=y_0$，所以函數 e^z 變 z 平面上的直角坐標網為 w 平面上的極坐標網。

又函數

$$w_1=e^{iz}=e^{ix}e^{-y} \tag{34}$$

的週期為 2π。由前可知這函數也變 z 平面上的直角坐標網為 w_1 平面上的極坐標網，但直線 $y=y_0$ 變為圓，而 $x=x_0$ 變為直線。

現在再看函數

$$w=\frac{k}{2}\left(w_1+\frac{1}{w_1}\right)=k\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=k\cos z\text{。} \tag{35}$$

變換(34)將直角坐標網變為極坐標網，而(35)則變此極坐標網為前面所說的共焦點橢圓和雙曲線網。因此這兩變換的積 $w=k\cos z$ 就變 z 平面上的直角坐標網為 w 平面上的共焦點橢圓和雙曲線網，即這共焦點橢圓和雙曲線網是函數 $w=k\cos z$ 在 w 平面上的等溫網。若看反函數 $w=\arccos\frac{z}{k}$，則其在 z 平面上的等溫網即共焦點橢圓和雙曲線網。

和前節完全一樣，由上面的理論可以導出一些關於保角變換的結果。函數(30_1)中之一變全 w 平面除去割線 $(-k,+k)$ 為 z 平面中單位圓的內部。對於任一固定的 ρ_0，$\rho_0<1$，這函數也將橢圓(32)的外部變為中心在原點，半徑等於 ρ_0 的圓的內部。如果我們取函數(30_1)的另一個，又取 $\rho_0>1$，則這函數變橢圓的外部為圓的外部。同樣知道函

數的一値將 w 平面上雙曲線(33)兩支間的區域變爲 z 平面上的角域，由下面的不等式所定義：

$$\varphi_0 \leqslant \arg z \leqslant \pi - \varphi_0, \quad 0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}。$$

保角變換和二次曲線間之關係之詳細研究可以在普里瓦洛夫的“複變函數論引論”一書中找到。

34. 二角形和帶域 現在我們看一個由兩圓 C_1 和 C_2 的弧所圍成的二角形(圖 35)，設這二角形的角爲 ψ，頂點爲 a_1 和 a_2，經過分式線性變換

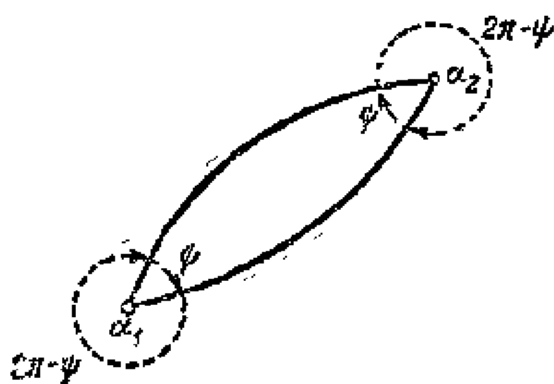


圖 35

$$w_1 = \frac{z-a_1}{z-a_2}$$

以後，頂點 a_1 和 a_2 變爲 $w_1=0$ 和 $w_2=\infty$，兩邊變爲從原點到無限遠點的半射線，二角形的內部變爲由這兩半射線所夾角度等於 ψ 的角域。如果再作變換 $w_2 = w_1^{\frac{\pi}{\psi}}$，則角度變爲 π，而角域則變爲半平面。再用 $e^{i\varphi_0}$ 形式的因子乘 w_2，我們可以將這半平面變做以實軸爲境界的上半平面。把這些變換合在一起，卽得一個把二角形變爲上半平面的變換：

$$w = e^{i\varphi_0}\left(\frac{z-a_1}{z-a_2}\right)^{\frac{\pi}{\psi}}。 \tag{36}$$

這裏 φ_0 是個實數，由二角形的位置而決定。如果對 w 再施行一個分式線性變換，則如[31]所述，可將二角形變爲單位圓。

注意：我們這裏所討論的二角形是包圍在兩圓弧之內的。圖 35 中兩圓弧以外的平面區域也可以看做一個二角形，他同樣是由這兩圓弧所圍成。不過這二角形的角度不是 ψ 而是$(2\pi-\psi)$了。

以上我們假設二角形的角度不等於零。現在再看角度等於零的情形。假設兩圓 C_1 和 C_2 內切於 a 點(圖 36)，則在 C_1 和 C_2 之間的區域可以看做一個角度爲零的二角形。同樣，若兩圓外切於 a，則在這兩圓以外的平面區域也是一個角度爲零的二角形 (圖 37)。若作一分式線性變換

$$w_1=\frac{1}{z-a},$$

則兩圓變爲兩條平行直線，而二角形變爲這兩直線間的帶域。再經過一個線性變換，卽相似變換，平行移動和旋轉三者之中某幾個的乘積，我們常可將這帶域變爲一個已給帶域，例如在二直線

$$y=0 \text{ 和 } y=2\pi$$

間的帶域。

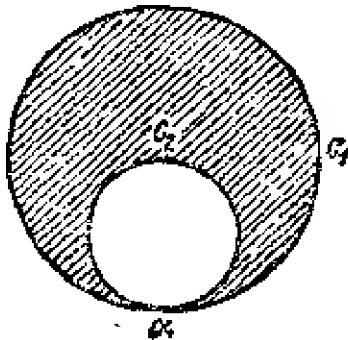


圖 36

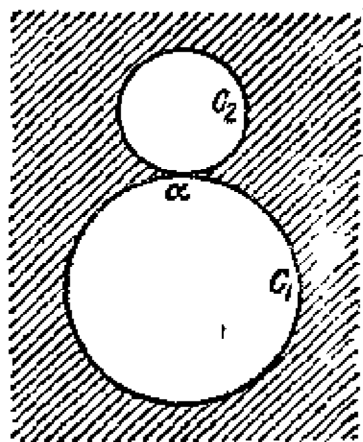


圖 37

現在再找一個將這帶域變爲上半平面的正則函數。我們知道函數 $w=e^z$ 將這帶域變爲全 w 平面除了沿實軸正方向的割線$(0, +\infty)$。因此再作變換$\sqrt{w}$，結果顯然就得到了上半平面，卽我們所要的變換爲

$$w=e^{\frac{z}{2}}。$$

由此可知函數 e^z 將 $y=0$ 和 $y=\pi$ 之間的帶域變爲上半平面，對 e^z

施行一個分式線性變換，將上半平面變爲單位圓[31]，卽得函數

$$(37) \qquad w=\frac{e^z-i}{e^z+i},$$

他將 $y=0$ 和 $y=\pi$ 之間的帶域變爲單位圓。

我們再仔細看一個特別的二角形，卽單位圓的上半部，他是由上半圓周和實軸上的線段 $(-1,\ +1)$ 所包圍而成的。函數

$$(38) \qquad w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

將這二角形的頂點 $z=-1$ 和 $z=+1$ 變爲 $w=0$ 和 $w=\infty$，而上半圓周和直徑 $(-1,\ +1)$ 則變爲經過 $w=0$ 的兩條半射線，他們之間的交角恰爲上半圓周和直徑 $(-1,\ +1)$ 間交角的兩倍，卽等於 π。換句話說，這兩半射線合成一條直線，易知這直線就是實軸，並且半圓圓周上的逆時針方向對應於實軸上由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的方向。所以(38)將單位圓上半部變爲上半平面，再施行分式線性變換(26)，卽得函數：

$$\frac{(z+1)^2-i(z-1)^2}{(z+1)^2+i(z-1)^2},$$

他把單位圓上半部變爲單位圓。

35. 基本定理 在以上幾節中我們看過許多將單通區域變爲半平面或單位圓的保角變換，這些單通區域中有有界的(如半圓)也有無界的(如橢圓的外部，二角形的外部)。現在我們要研究一般將 z 平面上任一已給單通區域變爲 w 平面上的單位圓或半平面的變換。這裏有兩個情形要除外，卽當這單通區域是整個 z 平面連無限遠點在內，或是全平面除了一點以外(例如無限遠點)時。在所有其他的情形之下，可以證明在已給單通區域 B 中常存在正則函數 $w=f(z)$，他把這區域變爲單位圓 $|w|<1$。於是我們又可藉助於分式線性變換把這單位圓變爲他自己，這樣就可得到另外的保角變換，也把區域 B 變爲單位圓。今設 A 是區

域 B 中一定點,在變換

$$w=f(z) \tag{39}$$

之下,設 A 點的像為 α, α 是在單位圓的內部。用以前的辦法對單位圓施行分式線性變換,我們常可將 α 變為原點,而單位圓仍舊變為他自己[31]。這樣就得到一個新的變換,把 B 變為單位圓,而 A 變為原點。此外,我們將單位圓繞原點旋轉,還可以使得當 A 變換到原點時線性元素不變方向,即 $f'(z)$ 在 A 點取正實數值。因此已給一個變換區域 B 為單位圓的保角變換,我們可以造出無限多個這種變換來。其中存在這種變換,他把 B 中一已知定點 A 變為單位圓圓心,並且不變在 A 點的方向。可以證明滿足這些條件的保角變換是唯一存在的。即下面的保角變換理論中的基本定理成立:

黎曼定理 設 B 為 z 平面中一已給單通區域(除上述兩種特殊情形以外),z_0 為 B 中之點,則在 B 內存在唯一的正則函數 $f(z)$,把 B 變為單位圓,z_0 變為原點,且 $f'(z_0)$ 取正實數值。

這定理我們祇用他而不去證明了。注意:定理中所說的函數祇在很特殊的情形之下對於最簡單的區域纔可以用初等函數來表示他。黎曼定理的證明祇肯定了這函數的存在,但是即使對於他的迫近建造,該定理也很少用處。以後我們要研究實際建造保角函數的迫近法的問題。

對黎曼定理還有一點重要的補充。即當區域的境界為單閉曲線並且具有[4]中所說的性質時,則函數 $f(z)$ 可以在整個閉區域中為連續,並將這區域的境界線變為單位圓圓周。這時反函數不但在單位圓內部為正則,且在閉圓中為連續。

如上所述,將一已給區域 B 保角變換為單位圓的函數祇在滿足黎曼定理中各條件時可以把他完全決定。但若假設這種函數還須在閉區

域 B 中為連續，則黎曼定理中的條件也可以用其他條件來代替。我們可以仿照分式線性變換那一節中一般，要求函數將區域 B 的境界線上三個已知點變為單位圓周上三個已知點。在這條件之下，將 B 保角變換為單位圓的函數可以完全決定。我們也可改用下面的條件：最先，要求將 B 內一已給點 z_0 變為原點。有了這個限制以後，我們還可以將單位圓繞着原點旋轉，所以再要求將 B 的境界線上一已給點變為單位圓周上一已給點。可以證明這種函數也可完全決定。總括一句，在滿足保證其在閉區域 B 中為連續的條件下，將 B 保角變換為單位圓的函數可由下面兩條件中之任一條件完全決定：(i) 將 B 的境界線上三已知點變為單位圓周上三已知點，(ii) 將 B 內一已知點及境界線上一已知點變為單位圓內一已知點及圓周上一已知點。

設在 z 平面上有兩個單通區域 B_1 和 B_2，由黎曼定理存在兩個正則函數

$$w_1=f_1(z_1) \text{ 和 } w_1=f_2(z_2), \tag{40}$$

分別將 B_1 和 B_2 變為單位圓 $|w_1|<1$。理論上，由(40)的兩式可以消去 w_1 而得到一個正則函數 $z_2=\varphi(z_1)$，他變 B_1 為 B_2。這時，對每一點 z_1 有一點 z_2，他們在(40)式之下對應於同一個 w_1。因此，對任意兩個單通區域（除前述兩個例外）存在一保角變換將一區域變為另一區域。我們當然也可以改用其他附加條件，像前段所述變區域為圓的情形一樣。

把單通區域變為圓或其他單通區域的函數 $f(z)$ 有一個重要的性質值得注意。卽當這兩個區域都是單葉區域，或更一般，當他們可以自己重疊但不含支點時，導數 $f'(z)$ 在區域內不能等於零，否則後一區域就要有支點了[23]。這時函數 $\lg f'(z)$ 和 $\sqrt{f'(z)}$ 在該單通區域中的解析延拓就不會有奇異點，因此是這區域中的單值正則函數[18]。

若在 z 平面中取一個二重連通區域，例如在兩條閉曲線之間的環域，則顯然不能把他保角變換爲一單通區域，使二者之間有一對一的點對應。

對於複通區域，有一件事和單通區域的情形不同的，即任二有相同連通性的複通區域之間未必一定存在保角變換，將一區域變爲另一區域。例如由同心圓圍成的兩個環之間要存在保角變換，當且僅當兩環的外徑和內徑之比相同。

但任一複通區域常可保角變換爲一個一定類型的區域，即每一 n 重連通區域可變換爲具有 n 條割線的平面，這些割線是互相平行的直線段，其中有些直線段可能退縮爲點。

在敍述建造保角函數的逼近法以前，我們先給將單位圓保角變換爲上半平面或折線所圍成的區域（即多角形）的函數一個解析表示。這公式在應用學科中常會遇到的。

36. 克利斯多夫公式 設在 z 平面上有一多角形 $A_1A_2\cdots A_n$（圖38），諸角的角度爲 $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \cdots, \alpha_n\pi$。又設函數

$$z=f(t) \tag{41}$$

將上半平面 t 保角變換爲這多角形。現在要求這函數的解析表示。設多角形的頂點 A_k 對應於實軸上的點：

$$t=a_k, \qquad (k=1,2,\cdots n)$$

藉助於平面 t 上的分式線性變換，我們常可使全部的 a_k 都是有限遠點。此外，可設這些點中最左的爲 a_1，最右的爲 a_n。我們先來研究 $f(t)$ 越過實軸解析延拓的問題。在實軸上任取一線段 a_ka_{k+1}，他所對應多角形的邊是 A_kA_{k+1}。由對稱原理函數 $f(t)$ 可越過 a_ka_{k+1} 解析延拓到下半平面去，而

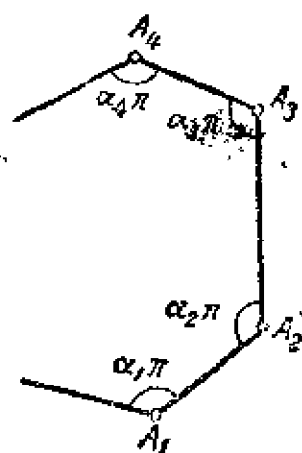


圖 38

由此延拓在下半平面中所得的函數值成一新的多角形，即由原來的多角形關於 A_kA_{k+1} 反射而得到的。於是我們又可以將這新得到的函數從下半平面越過另一線段 a_la_{l+1} 解析延拓到上半平面去。由對稱原理這延拓所得上半平面中的函數值也成一多角形，即由第二個多角形關於 A_lA_{l+1} 反射而得到的。這樣做下去可知函數 $f(t)$ 可以自由地越過實軸上任一線段從這一半平面解析延拓到另一半平面中去，在每一半平面中的函數值都成一多角形，但後一多角形可由前一多角形關於其一邊反射而得，這一邊所對應的實軸上的線段就是做解析延拓時所越過的線段。注意這時多角形的邊 A_nA_1 對應於實軸上從 a_n 到 ∞，再從 ∞ 到 a_1 的線段，t 平面上的無限遠點對應於 A_nA_1 上的一點。一般，a_k 是函數 $f(t)$ 的奇異點。現在我們來看這種奇異點有何特徵。爲確定起見取 a_2 爲例。環繞着 a_2 從上半平面出發，經過下半平面，然後又回到上半平面來。爲此，我們先將 $f(t)$ 由上半平面越過線段 a_1a_2 解析延拓到下半平面，再由下半平面越過線段 a_2a_3 解析延拓到上半平面去。如前所述，$f(t)$ 在下半平面中的值成一多角形 $A_1A_2A_3'\cdots A_n'$，他是由多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ 關於 A_1A_2 反射而得到的。越過 a_2a_3 再回到上半平面時，函數值也成一多角形，他是由多角形 $A_1A_2A_3'\cdots A_n'$，關於 A_2A_3' 反射而得到的(圖 39)。

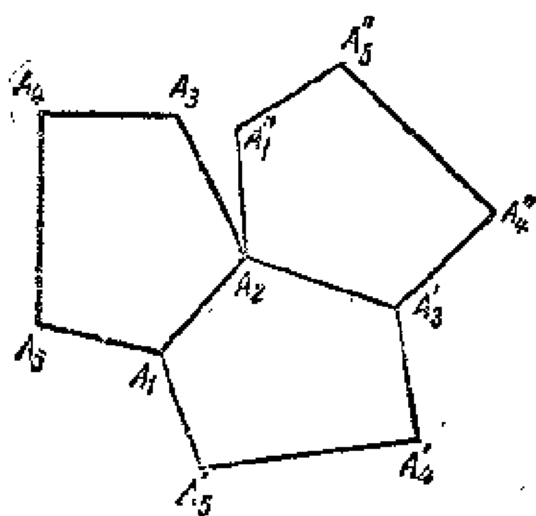


圖 39

因此上述環繞 a_2 的路線對應於 z 平面上關於 A_2A_1 和 A_2A_3' 兩線段的反射，在[31]中已證明過這是一個形式如

$$z'-b_2=e^{i\varphi}(z-b_2)$$

的線性變換，其中 b_2 是 A_2 的坐標。

由是立刻可得：
$$\overset{*}{f}(t)=e^{i\varphi}f(t)+\gamma,$$
這裏 γ 是個常數 $(\gamma=b_2-e^{i\varphi}b_2)$，而 $\overset{*}{f}(t)$ 是 $f(t)$ 在上半平面的一個新支。

由上式可得：
$$\frac{\overset{*}{f}''(t)}{\overset{*}{f}'(t)}=\frac{f''(t)}{f'(t)},$$
所以函數

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} \tag{42}$$

在 a_2 的鄰域中爲正則單值，故 a_2 是函數(42)的極點或本性奇異點，現在證明這點是單極點，其留數爲 (α_2-1)。實際上，引進一個新的變數 z' 以代 z，
$$z'=(z-b_2)^{\frac{1}{\alpha_2}},$$
其中 b_2 是 A_2 的坐標。頂點 A_2 所對應的是 $z'=0$，兩邊 A_2A_1 和 A_2A_3 間的夾角是 $\alpha_2\pi$，經變換後成爲 z' 平面上從原點出發的兩線段，其間的角度等於 π，即這兩線段是同在經過原點的直線 l 之上。回到 t 平面，可見 a_2 的鄰域在實軸以上的部分變爲 z' 平面上 $z'=0$ 點的鄰域在 l 的一邊的部分。由對稱原理知道 a_2 的鄰域在實軸以下的部分變爲 z' 平面上 $z'=0$ 點的鄰域在 l 的另一邊的部分。因此，$t=a_2$ 的鄰域變爲 $z'=0$ 的單葉鄰域，故應有下面的展開式：
$$z'=(z-b_2)^{\frac{1}{\alpha_2}}=c_1(t-a_2)+c_2(t-a_2)^2+\cdots \qquad (c_1\neq 0)$$

因此
$$z=b_2+c_1^{\alpha_2}(t-a_2)^{\alpha_2}\left\{1+\frac{c_2}{c_1}(t-a_2)+\frac{c_3}{c_1}(t-a_2)^2+\cdots\right\}^{\alpha_2}$$

或由牛頓二項式公式[對照 23]：

$$f(t)=b_2+(t-a_2)^{\alpha_2}f_1(t),$$

其中 $f_1(t)$ 在 $t=a_2$ 爲正則，且在這點不等於零。

由此：
$$f'(t)=\alpha_2(t-a_2)^{\alpha_2-1}f_1(t)+(t-a_2)^{\alpha_2}f_1'(t)$$
$$f''(t)=\alpha_2(\alpha_2-1)(t-a_2)^{\alpha_2-2}f_1(t)+2\alpha_2(t-a_2)^{\alpha_2-1}f_1'(t)+$$
$$+(t-a_2)^{\alpha_2}f_1''(t),$$

從而：

$$\frac{f''(t)}{f'(t)}=\frac{1}{t-a_2}\cdot\frac{\alpha_2(\alpha_2-1)f_1(t)+2\alpha_2(t-a_2)f_1'(t)+(t-a_2)^2f_1''(t)}{\alpha_2 f_1(t)+(t-a_2)f_1'(t)}。$$

右邊第二個因子是一在 $t=a_2$ 點爲正則的函數，在這點其值爲 (α_2-1)，所以在 $t=a_2$ 這點的鄰近成立下之展開式：

$$\frac{f''(t)}{f'(t)}=\frac{\alpha_2-1}{t-a_2}+P(t-a_2),$$

其中 $P(t-a_2)$是個在 $t=a_2$ 點爲正則的函數。

同樣可證函數(42)在實軸上每一點 a_k 有一階極點，其留數爲 (α_k-1)。這函數除 $a_k(k=1, 2, \cdots, n)$外不再有其他有限遠奇異點，故

$$\frac{f''(t)}{f'(t)}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\alpha_s-1}{t-a_s} \tag{43}$$

爲全平面的正則單值函數。現在看他在無限遠點取什麼數值。前面我們已經知道函數 $f(t)$ 當 $t\to\infty$ 時有一定的極限值，卽多角形一邊 A_nA_1 上某點的坐標 b_∞。因此在無限遠點近傍 $f(t)$ 可展開爲：

$$f(t)=b_\infty+\frac{c_1}{t}+\frac{c_2}{t^2}+\cdots$$

而函數 $\frac{f''(t)}{f'(t)}$ 在無限遠點近傍可展開爲：

$$\frac{f''(t)}{f'(t)}=\frac{d_1}{t}+\frac{d_2}{t^2}+\cdots,$$

這函數當 $t\to\infty$ 時極限爲零。故函數(43)在全平面爲正則，當 $t\to\infty$

時極限爲零，故爲全平面有界。由利烏徵爾定理[9]，(43)式應該等於常數，又因剛才證明當 $t\to\infty$ 時其極限爲零，所以這常數卽零。這樣我們就得到下面的等式：

$$
f''(t)/f'(t)=\frac{\alpha_1-1}{t-a_1}+\frac{\alpha_2-1}{t-a_2}+\cdots+\frac{\alpha_n-1}{t-a_n}。\tag{44}
$$

積分一次得：

$$
\lg f'(t)=(\alpha_1-1)\lg(t-a_1)+(\alpha_2-1)\lg(t-a_2)+\cdots+
$$
$$
+(\alpha_n-1)\lg(t-a_n)+C
$$

或
$$
f'(t)=A(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1},
$$

再積分一次卽得：

$$
z=f(t)=A\int_0^t(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt+B,\tag{45}
$$

其中 A 和 B 是常數。(45)式就是將上半 t 平面變爲多角形的保角變換的解析表示，其中 $\alpha_k\pi$ 是多角形諸角的角度，a_k 是 t 平面中實軸上的點，A 和 B 是複常數。

現在看看這兩個常數的作用何在。在證明(45)式時我們祇用到多角形的頂角。因此，若這多角形經過運動或相似變換而得另一多角形，則將上半 t 平面變爲這新多角形的保角變換仍是(45)的形式。所以 A 和 B 的作用就在這裏：對於不同的 A 和 B 的值，我們有頂角相同而位置或大小不同的多角形。(45)式中諸常數 a_k 的任務更爲重大。他們在實軸上的位置和常數 A 的值決定了多角形的邊長。這問題我們以後還要談到。

在證明(45)式時我們假定所有實軸上對應於多角形頂點的 a_k 都是有限遠點。現在假設有一頂點 A_n 對應於實軸上的無限遠點。我們很容易從(45)式導出和他對應的公式來，祇要由下式引進另一變數 τ 以代替 t：

$$t=-\frac{1}{\tau}+a_n,$$

因當 $t=a_n$ 時 $\tau=\infty$。經這變換後即得：

$$f(\tau)=A\int_{\tau_0}^{\tau}\left(a_n-a_1-\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_1-1}\cdots\left(a_n-a_{n-1}-\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_{n-1}-1}\left(-\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_n-1}\frac{d\tau}{\tau^2}+B。$$

對多角形的各頂角顯有

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n-2。\tag{46}$$

利用這關係我們可將前面的式子改寫為：

$$f(\tau)=A'\int_0^{\tau}(\tau-a_1')^{\alpha_1-1}(\tau-a_2')^{\alpha_2-1}\cdots(\tau-a_{n-1}')^{\alpha_{n-1}-1}d\tau+B'。\tag{47}$$

這就是當多角形的一個頂點對應於無限遠點 $\tau=\infty$ 時的公式。

由公式(45)不難得到將單位圓 $|w|<1$ 變為多角形的保角變換。祇須應用將上半 t 平面變為單位圓 $|w|<1$ 的分式線性變換就成了。這變換是：

$$w=\frac{t-i}{t+i}\quad 或\quad t=\frac{1}{i}\,\frac{w+1}{w-1}。$$

代入(45)式，並引用(46)的關係，可得

$$z=A''\int_0^{w}(w-a_1'')^{\alpha_1-1}(w-a_2'')^{\alpha_2-1}\cdots(w-a_n'')^{\alpha_n-1}dw+B'',\tag{48}$$

其中 a_k'' 是單位圓周上的點，由 a_k 藉下式而決定：

$$a_k''=\frac{a_k-i}{a_k+i}。$$

在(47)和(48)中我們將積分的下限都改為零，祇不過影響了常數 B' 和 B'' 的值，故無甚關係。

記住公式(45)所由導出的基礎：我們先假設存在一個函數 $f(t)$ 將上半平面變為多角形，然後證明 $f(t)$ 可用(45)式來表示。現在反過來，假設 a_k 是已給實軸上若干個點，α_k 是滿足條件(46)的正數，我們要證明公式(45)將上半平面變為一個區域，他不含有任何支點在內（單葉或

多葉),他的境界是條折線,以 $\alpha_k\pi$ 爲頂角($k=1, 2, \cdots, n$)。首先,我們看到被積函數的每一個因子 $(t-a_k)^{\alpha_k-1}$ 在上半平面中爲正則單葉,又導數

$$f'(t)=A(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}$$

在上半平面中沒有零點。因此(45)式將上半平面保角變換爲 z 平面中一區域 B,不含支點在內。現在看上半平面的境界線,即實軸,變做什麼。設 t 在線段 $a_1\leqslant t\leqslant a_2$ 中變動。對應的區域 B 的境界線上的點是:

$$z=A\int_{a_1}^{t}(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt+C, \tag{49}$$

其中 C 是常數,由下式決定:

$$C=B+A\int_{0}^{a_1}(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt。$$

當 t 在上述線段中變動時每一 $t-a_k$ 的輻角不變,設以 φ_k 記之,顯然有 $\varphi_1=0$, $\varphi_k=\pi$ 當 $k>1$($a_1<a_2<\cdots<a_n$)。因此這時(49)式的被積函數的輻角也不變,其值爲

$$(\alpha_1-1)\varphi_1+(\alpha_2-1)\varphi_2+\cdots+(\alpha_n-1)\varphi_n=\varphi,$$

故(49)式可以改寫爲:

$$z=Ae^{i\varphi}\int_{a_1}^{t}|t-a_1|^{\alpha_1-1}|t-a_2|^{\alpha_2-1}\cdots|t-a_n|^{\alpha_n-1}dt+C, \tag{50}$$

這積分是在實軸上的線段 $a_1\leqslant t\leqslant a_2$ 中履行,所以根本是個實積分。由(50)式顯然可知實軸上的線段 $a_1\leqslant t\leqslant a_2$ 對應於 z 平面上的直線段 A_1A_2,其起點爲 $z=C$,與實軸間的交角爲 $\arg(Ae^{i\varphi})$。當 t 從線段 $a_1\leqslant t\leqslant a_2$ 前進到線段 $a_2\leqslant t\leqslant a_3$ 中時必須越過 a_2 這點。因此 $(t-a_2)$ 的輻角得到改變量 $(-\pi)$,而 $(t-a_2)^{\alpha_2-1}$ 的輻角得到改變量 $-\pi(\alpha_2-1)$。故當 t 在線段 $a_2\leqslant t\leqslant a_3$ 中變動時我們可得和(50)相似的公式,唯輻角 φ 和該式中的輻角相差 $-\pi(\alpha_2-1)$,就是說,線段 $a_2\leqslant t\leqslant a_3$ 對應於 z 平面中

的直線段 A_2A_3，他和 A_1A_2 的夾角等於$(\pi-\alpha_2\pi)$。其餘可以類推。

最後，我們看 t 平面上的無限遠點。爲此，將(45)式的被積函數改寫爲：

$$t^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-n}\left(1-\frac{a_1}{t}\right)^{\alpha_1-1}\left(1-\frac{a_2}{t}\right)^{\alpha_2-1}\cdots\left(1-\frac{a_n}{t}\right)^{\alpha_n-1}。$$

應用牛頓二項式公式及(46)的關係，得到被積函數在無限遠點鄰近的展開式

$$\frac{1}{t^2}+\frac{C_3}{t^3}+\frac{C_4}{t^4}+\cdots,$$

結果(45)式右邊的積分就可寫如：

$$d_0+\frac{d_1}{t}+\frac{d_2}{t^2}+\cdots$$

即由(45)式所定義的函數 $f(t)$ 在 $t=\infty$ 點爲正則。因此，當 t 經過實軸上的無限遠點時，在 z 平面上同樣得到一直線段。又因 $\alpha_k>0$，故(45)式的積分在每點 $t=a_k$ 有一定的有限值。我們所要證明的都已證畢。如前所述，這樣得到的多角形可以自己重疊(圖40)。對公式(47)和(48)有完全類似的話可以說。例如：當 a_k' 是單位圓圓周上任意取的若干點，α_k 是任意正常數，滿足條件(46)，則(48)式將單位圓保角變換爲一區域 B，不含支點在其內，且以折線爲境界。

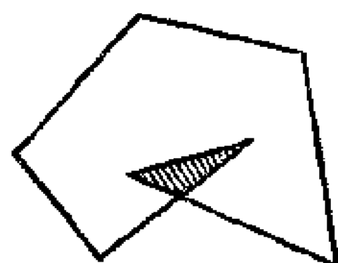


圖 40

37. 特別情形　這一節所講的是前一節的幾個特別情形。首先，看最簡單的三角形。對 t 平面應用分式線性變換，我們常可將問題歸到一種比較簡單的情形，即三角形的頂點對應於 $t=0,\ 1,\ \infty$ 三點。這時我們應該用公式(47)，置 $a_1'=0$，$a_2'=1$，即得

$$z=A'\int_0^t \tau^{\alpha_1-1}(\tau-1)^{\alpha_2-1}d\tau+B'。\tag{51}$$

在這公式中祇有 A' 和 B' 是任意的，他們對於變換不是重要的角色，唯當三角形受到相似變換時，A' 和 B' 的值就起了變化。公式(51)之所以能夠比較簡單些乃是因爲任意兩三角形的頂角相等時必爲相似之故。對四角形這事實就不成立，故對頂角一定的四角形，和(51)式相當的一般公式中被積函數就含有一個未定參數，這參數須由四角形的邊長來決定。

公式(51)也適用於頂角爲 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 0 的無限三角形。這種三角形顯然就是由兩條平行半射線和一條垂直於他們的線段所圍成的半帶域

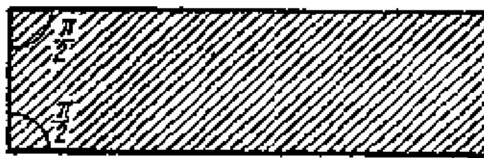


圖 41

(圖41)。於(51)式中置 $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$，得：

$$z=A'\int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(\tau-1)}}+B'。$$

現在再看矩形的情形。假設一矩形 B 的頂點坐標爲(圖 42)：

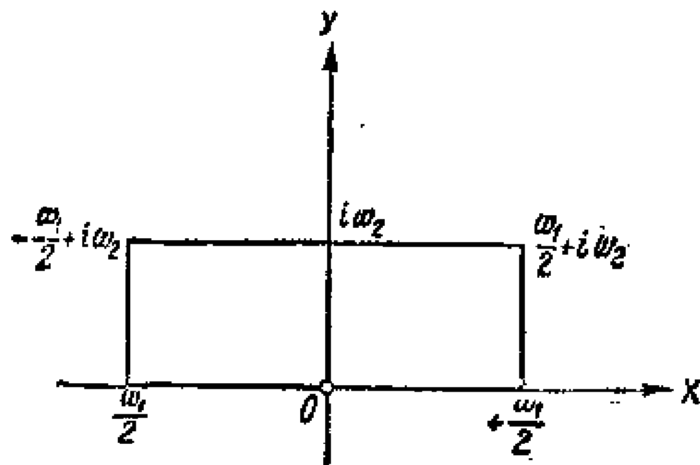


圖 42

$$-\frac{\omega_1}{2},\ \frac{\omega_1}{2},\ \frac{\omega_1}{2}+i\omega_2,\ -\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2,$$

其中 ω_1 和 ω_2 是已給正實數。取這平行四邊形的右邊一半，其頂點爲

$$0, \frac{\omega_1}{2}, \ \frac{\omega_1}{2}+i\omega_2, \ i\omega_2,$$

假設這一半被保角變換爲上半 t 平面的右邊一半，卽實數部分爲正的那一部分。這時我們可以假定頂點 $0, \frac{\omega_1}{2}$ 和 $i\omega_2$ 對應於實軸上的 $0, 1$ 和 ∞。在此對應之下，頂點 $\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2$ 對應於實軸上 1 和 ∞ 之間某一點，設以 $\frac{1}{k}$ 記之，則 $0<k<1$。由對稱原理長方形的左邊一半應對應於上半 t 平面的左邊一半，而頂點 $-\frac{\omega_1}{2}$，$-\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2$ 則對應於 $t=-1$ 和 $t=-\frac{1}{k}$。照這樣說來，我們知道將上半平面變爲長方形 B 的保角變換常可如此歸範，使得 $t=-1, 0, 1, \infty$ 諸點依次對應於 $z=-\frac{\omega_1}{2}, 0, \frac{\omega_1}{2}, i\omega_2$ 諸點，而同時 $t=\frac{1}{k}$ 及 $t=-\frac{1}{k}$ 則對應於 $z=\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2$ 及 $z=-\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2$。現在可以應用公式(45)，置 $a_1=-\frac{1}{k}$; $a_2=-1$; $a_3=1$; $a_4=\frac{1}{k}$ 又 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\frac{1}{2}$。又當 $t=0$ 時 $z=0$，故得

$$z=A'\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(\frac{1}{k^2}-t^2\right)}}$$

或可改寫爲：

$$z=A\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}。 \tag{52}$$

當 t 在實軸上的線段 $-1<t<1$ 中變動時，對應的 z 在實軸上的線段 $\left(-\frac{\omega_1}{2}, +\frac{\omega_1}{2}\right)$ 之中。由此知在(52)式中 A 可設爲正常數，而當 $t=0$ 時應取 $\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$ 等於 1。因爲 $\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$ 在上半平面

中須是正則函數並且沒有支點，故這根式在該上半平面中之其他的值可以唯一方法決定之。因頂點$\frac{\omega_1}{2}$和$\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2$對應於$t=1$和$t=\frac{1}{k}$，故得：

$$(53)\qquad \begin{cases} \dfrac{\omega_1}{2}=A\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\ \omega_2=A\displaystyle\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}。\end{cases}$$

長方形的邊長等於ω_1和ω_2，若已知邊長的比，則可由下面的方程決定被積函數中之參數k：

$$(54)\qquad \omega_1:\omega_2=2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}:\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}。$$

由這樣決定的k(理論上說)我們用(53)中任一式卽可決定A。

(52)式中的積分不能用初等函數來表示，稱爲第一類李商特橢圓積分。我們以後還要談到這種積分，但現在不擬再說由方程(54)決定k的問題了。我們說了以上這一些，祇是爲了要更確切地解釋決定克利斯多夫公式中常數的問題。

現在再看一個特別情形。設在z平面中有一正n角形$A_1A_2\cdots A_n$，其中心爲$z=0$。(圖43是$n=6$的情形。)取一保角變換將三角形OA_1A_2變爲單位圓中中心角爲$\frac{2\pi}{n}$的扇形$O'A_1'A_2'$，使頂點O，A_1，A_2依次對應於圓心O'及圓弧的端點A_1'和A_2'。將三角形OA_1A_2關於其一邊OA_2反射可得三角形OA_2A_3，由對稱原理，和OA_2A_3對應的應該是由扇形$O'A_1'A_2'$關於半徑$O'A_2'$反射而得的扇形$O'A_2'A_3'$。這樣藉解析延拓可將整個正多角形照像於整個單位圓。在這照像之下，和多角形頂點對應的n個點分單位圓圓周爲n等分。此外，在公式(48)中現在應置

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\frac{n-2}{n}=1-\frac{2}{n}。$$

將單位圓繞着原點旋轉，可使和 A_1 對應的點爲 $w=1$，於是和多角形其他頂點對應的圓周上的點就是 $e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$，而(48)式中的被積函數就是

$$\left[(w-1)(w-e^{i\frac{2\pi}{n}})(w-e^{i\frac{4\pi}{n}})\cdots(w-e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}})\right]^{-\frac{2}{n}}。$$

設多角形的中心爲原點，則將單位圓變爲正 n 多角形的變換便可寫爲：

$$z=A''\int_0^w\frac{dw}{\sqrt[n]{(w^n-1)^2}}。\tag{55}$$

常數 A'' 的模由多角形的面積決定，其幅角表示多角形關於中心的旋轉角。

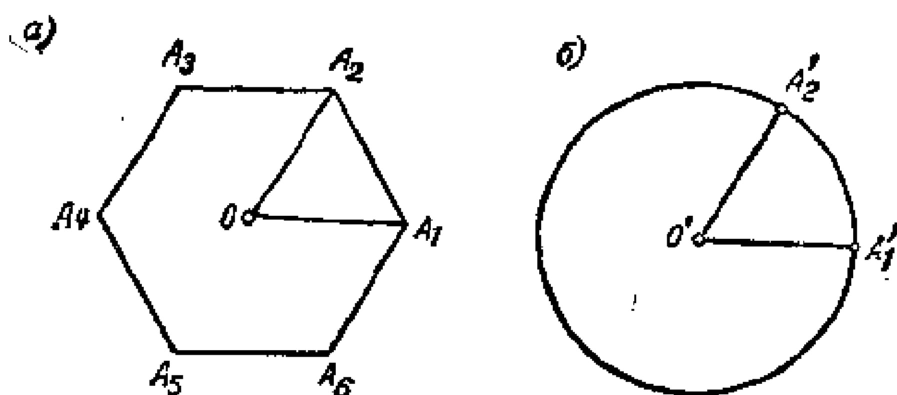


圖 43

38. 多角形的外部 現在再看平面上在一條關閉折線以外的部分(圖 44)。這區域也可稱爲多角形，但包含無限遠點在其內。設 $z=f(w)$ 將單位圓保角變換爲這無限多角形。這多角形各頂角之和等於 $\pi(n+2)$，設以 $\alpha_k\pi$ 記各頂角的角度，則代替(46)而有下面的關係：

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n+2。\tag{56}$$

假設原點 $w=0$ 對應於 $z=\infty$，則函數 $f(w)$ 以原點爲單極點，故函

數 $f'(w)$ 在原點鄰近可展開如：

$$(57)\qquad f'(w)=\frac{c_{-2}}{w^2}+c_0+c_1w+\cdots$$

又設單位圓周上對應於多角形頂點的是 a_k''。如前作函數 $\frac{f''(w)}{f'(w)}$。和[36]中一樣可證這函數以 a_k'' 爲單極點，其留數爲 α_k-1。又由(57)式知道他以原點爲單極點，其留數爲 (-2)。除了以上這些極點之外，這函數處處爲正則。現在再看他在無限遠點的行爲怎樣。已知 $f(w)$ 在原點之值爲 ∞，故當 $f(w)$ 被解析延拓越過單位圓周上某一弧 $a_k''a_{k+1}''$ 而至圓的外部，他在無限遠點的值應該和他在原點的值(即 ∞)關於 $a_k''a_{k+1}''$ 的像爲對稱。但 $a_k''a_{k+1}''$ 的像是一直線段，即多角形的某一邊，所以 $f(w)$

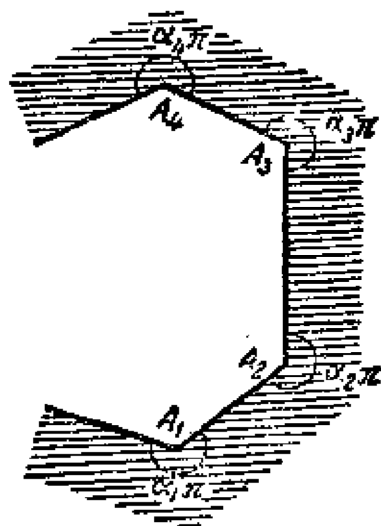


圖 44

在無限遠點的值必等於 ∞，他把 $w=\infty$ 的鄰域變爲 $z=\infty$ 的單葉鄰域(即多角形中由 $w=0$ 的鄰域藉 $f(w)$ 而得 $z=\infty$ 的鄰域關於一邊 A_kA_{k+1} 的反射域)。故由上述解析延拓所得的 $f(w)$ 在無限遠點鄰域中可展開爲：

$$(58)\qquad f(w)=d_{-1}w+d_0+\frac{d_1}{w}+\cdots\qquad (d_{-1}\neq 0)。$$

函數 $f''(w)/f'(w)$ 在全平面中爲單值正則，除了前述的極點以外。微分(58)式可得 $f''(w)/f'(w)$ 在無限遠點鄰域中的展開式如：

$$(59)\qquad \frac{f''(w)}{f'(w)}=\frac{h_3}{w^3}+\frac{h_4}{w^4}+\cdots,$$

因這函數是單値的，故上之展開式和解析延拓所經過的路線無關。由(59)式知 $f''(w)/f'(w)$ 在無限遠點亦爲正則，其值爲零。仿[36]中證

明(44)式一樣可證現在:

$$(60)\qquad \frac{f''(w)}{f'(w)}=-\frac{2}{w}+\frac{\alpha_1-1}{w-a_1''}+\frac{\alpha_2-1}{w-a_2''}+\cdots+\frac{\alpha_n-1}{w-a_n''},$$

又由此可證和(45)式相當的:

$$(61)\qquad z=A\int_1^w(w-a_1'')^{\alpha_1-1}(w-a_2'')^{\alpha_2-1}\cdots(w-a_n'')^{\alpha_n-1}\frac{dw}{w^2}+B。$$

若對 w 施行變換 $w=\frac{1}{\tau}$,則單位圓的內部變爲單位圓的外部,以這變換代入(61)式卽得將單位圓外部變爲關閉折線外部的保角變換,其中無限遠點和無限遠點相對應:

$$(62)\qquad z=A'\int_1^\tau(\tau-a_1)^{\alpha_1-1}(\tau-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(\tau-a_n)^{\alpha_n-1}\frac{d\tau}{\tau^2}+B。$$

這公式在形式上和公式(61)完全一樣。

試以正方形的外域爲例。因爲對稱的關係,單位圓周上的點 a_k 分這圓爲四等分。將圓周旋轉可使這四點爲:

$$a_1=1;\quad a_2=i;\quad a_3=-1;\quad a_4=-i。$$

至於正方形的頂角則有:

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\frac{3}{2},$$

代入(62)式得:

$$(63)\qquad z=A'\int_1^\tau\sqrt{\tau^4-1}\,\frac{d\tau}{\tau^2}+B。$$

常數 A' 和 B 的數值由正方形的面積和他在平面中的位置而決定。

注意:[36]前半部所有的結果都是關於將半平面變爲多角形的變換的,而在這一節我們用這些結果則是在圓變爲多角形的情形。不難知道[36]中的結果確可適用於我們現在的情形。

對(62)式再作一點注意。用(56)式的關係,(62)式中的被積函數

可改寫爲：

$$\left(1-\frac{a_1}{\tau}\right)^{\alpha_1-1}\cdot\left(1-\frac{a_2}{\tau}\right)^{\alpha_2-1}\cdots\left(1-\frac{a_n}{\tau}\right)^{\alpha_n-1},$$

用牛頓二項式公式，這函數在無限遠點的鄰域中有如下之展開式：

$$1-\frac{(\alpha_1-1)a_1+(\alpha_2-1)a_2+\cdots+(\alpha_n-1)a_n}{\tau}+\frac{c_2}{\tau^2}+\frac{c_3}{\tau^3}+\cdots$$

將上式逐項積分時，第二項的積分含有函數 $\lg\tau$，但已知 $\tau=\infty$ 的鄰域對應於 $z=\infty$ 的單葉鄰域，故必須（亦爲充分）下面的條件成立：

$$(\alpha_1-1)a_1+(\alpha_2-1)a_2+\cdots+(\alpha_n-1)a_n=0\text{。}\tag{64}$$

因爲如果這條件不滿足的話，(62)式就將單位圓的外部 $|\tau|>1$ 變爲區域 B，以閉折線爲境界，但以無限遠點爲對數型支點，這是不可能的。

照前面所說過的，公式(62)也適用於將單位圓內部 $|\tau|<1$ 變爲無限多角形的情形，這時 $\tau=0$ 對應於無限遠點。若將被積函數在 $\tau=0$ 附近展開，而置 $\frac{1}{\tau}$ 的係數爲零，則得

$$(\alpha_1-1)\frac{1}{a_1}+(\alpha_2-1)\frac{1}{a_2}+\cdots+(\alpha_n-1)\frac{1}{a_n}=0\text{。}$$

這式子和(64)式完全一樣，因爲由 $|a_k|=1$ 有 $a_k^{-1}=\bar{a}_k$，而 α_k 是正實數之故。

39. 變換區域爲圓的函數的極小性質　設函數

$$z=f(\tau)=\tau+c_2\tau^2+\cdots,\tag{65}$$

在圓 $|\tau|<R$ 中爲正則。他變這圓爲一區域 B，可能是多葉，甚至含有支點在其內。對 $R_1<R$，圓 $|\tau|<R_1$ 被函數(65)變爲區域 B 的一部分，以 B_1 記之。現在要決定 B_1 的面積。由[29]所證，這面積可以用下面的積分來表示：

$$S_1=\iint\limits_{|\tau|<R_1}|f'(\tau)|^2\,d\sigma,$$

或可改寫爲：

$$S_1=\int_0^{R_1}\int_0^{2\pi}(1+2c_2re^{i\varphi}+3c_3r^2e^{i2\varphi}+\cdots)(1+2\bar{c}_2re^{-i\varphi}+3\bar{c}_3r^2e^{-i2\varphi}+\cdots)\,r\,dr\,d\varphi\text{。}$$

因爲上式中的級數在圓 $|\tau|<R_1$ 中絕對且一致收斂，故可逐項相乘以後再逐項積分，又因形式爲 $e^{ik\varphi}$（k 是不等於零的整數）的函數在區間 $(0,\ 2\pi)$ 上積分之值爲零，故逐項積分後祇剩不含 $e^{ik\varphi}$ 各項的積分，這時關於 φ 積分就等於用 2π 來乘。所以得到：

$$S_1=2\pi\int_0^{R_1}(1+2^2|c_2|^2r^2+\cdots+n^2|c_n|^2r^{2n-2}+\cdots)rdr$$

或

$$S_1=\pi R_1^2+\pi\sum_{n=2}^{\infty}n|c_n|^2R_1^{2n} \tag{66}$$

將 $R_1\to R$，上式右邊的和隨 R_1 增加或趨向有限的極限，或趨向 ∞。但無論如何這極限值必大於 πR^2，只要在(65)的展開式中有一個 c_k 不等於零。因這極限值表示區域 B 的面積，而 πR^2 表示圓 $|\tau|<R$ 的面積，故得下之結論：圓 $|\tau|<R$ 中的正則函數(65)常把這圓變爲一個面積較大的區域，只要在(65)中至少有一個係數 c_k 不等於零。

有了這個預備定理以後，我們現在要證明保角變換的一個重要的性質。設 B 爲 z 平面中一單通有界區域，不失一般性，可設原點 $z=0$ 也在這區域之中。又設函數 $F_1(z)$ 將 B 保角變換爲單位圓，使原點 $z=0$ 對應於圓心。這函數在 $z=0$ 的鄰域中可展開爲：

$$F_1(z)=d_1z+d_2z^2+\cdots,$$

這裏可設 $d_1>0$。現在再引進一個新的函數

$$F(z)=\frac{1}{d_1}F_1(z)\ 。$$

這函數變 B 爲圓 $|\tau|<R$，其中 $R=\frac{1}{d_1}$，他在 $z=0$ 鄰近的展開式爲：

$$\tau=F(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots \tag{67}$$

$F(z)$ 的反函數在圓 $|\tau|<R$ 之內爲正則，並可展開如：

$$z=f(\tau)=\tau+c_2\tau^2+c_3\tau^3+\cdots \tag{68}$$

二重積分

$$\iint_B|F'(z)|^2d\sigma, \tag{69}$$

表示圓 $|\tau|<R$ 的面積，故其值爲 πR^2。今取另一在 B 中爲正則的函數 $\varphi(z)$，他在 $z=0$ 的鄰域中有形式如(67)的展開式。以(68)式代入 $\varphi(z)$ 之中，得到一個 τ 的函數，他在 $|\tau|<R$ 中爲正則，並可展開爲：

$$\varphi(z)=\varphi[f(\tau)]=\tau+e_2\tau^2+e_3\tau^3+\cdots=f_1(\tau)。 \tag{70}$$

對函數 $\varphi(z)$ 計算和(69)相當的積分。變 z 爲 τ，並記住 τ 平面中的面積單元和 z 平面中的面積單元間存在下面的關係[29]：

$$d\sigma_z=|f'(\tau)|^2d\sigma_\tau,$$

可得：
$$\iint_B|\varphi'(z)|^2d\sigma_z=\iint_{|\tau|<R}|\varphi'(z)\cdot f'(\tau)|^2d\sigma_\tau=\iint_{|\tau|<R}|f_1'(\tau)|^2d\sigma_\tau,$$

由前面證明過的定理知道這積分的值大於 πl^2，只要(70)的展開式中至少有一個 c_k 不等於零。如果所有的 c_k 都等於零，即 $\varphi(z)=z$，則顯有 $\varphi(z)=F(z)$。因此成立下面的定理：

定理. 對於所有在 B 內為正則，且於 $z=0$ 的鄰近有形式如(67)的展開式的函數做二重積分(69)，那將 B 保角變換為以原點做中心的圓的函數使積分(69)取極小值。

我們可以用這定理來求變 B 為圓的函數 $F(z)$ 的逼近多項式。為此，假定 $F(z)$ 可以用 n 次多項式逼近表示如下：

$$F(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n, \tag{71}$$

則這多項式是所有這種形式的多項式中使積分 (69) 取極小值的那一個。現在要用這條件來決定係數 a_k。任取一多項式

$$\omega(z)=b_2z^2+b_3z^3+\cdots+b_nz^n,$$

再做一個和 $F(z)$ 有相同形式的多項式：

$$\Phi(z)=F(z)+\varepsilon\omega(z),$$

其中 ε 假設是個實參數。對這多項式做積分(69)：

$$\iint\limits_B [F'(z)+\varepsilon\omega'(z)][\overline{F'(z)}+\varepsilon\overline{\omega'(z)}]ds。$$

這是 ε 的函數，當 $\varepsilon=0$ 時他取極小值。它對 ε 的導數當 $\varepsilon=0$ 時等於零，於是得到下面這條件：

$$\iint\limits_B [F'(z)\omega'(z)+\overline{F'(z)}\omega'(z)]ds=0, \tag{72$_1$}$$

上式對任意多項式 $\omega(z)$ 皆成立。

同樣以 $i\delta$ 代 ε，其中 δ 是實數，可以得到下面的條件：

$$\iint\limits_B [F'(z)\overline{\omega'(z)}-\overline{F'(z)}\omega'(z)]ds=0。 \tag{72$_2$}$$

兩式相加，得：
$$\iint\limits_B F'(z)\overline{\omega'(z)}ds=0。$$

依次取 $\omega(z)$ 為 $z^2, z^3, \cdots, z^n$，又置

$$p_{ik}=\iint\limits_B \bar{z}^i z^k ds, \tag{73}$$

可得下面一組 a_k 的一次方程：

$$\left\{\begin{aligned}
&p_{10}+2p_{11}a_2+3p_{12}a_3+\cdots+np_{1,n-1}a_n=0\\
&p_{20}+2p_{21}a_2+3p_{22}a_3+\cdots+np_{2,n-1}a_n=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_{n-1,0}+2p_{n-1,1}a_2+3p_{n-1,2}a_3+\cdots+np_{n-1,n-1}a_n=0。
\end{aligned}\right. \tag{74}$$

因此只要能算出積分(73)的值，我們便可由(74)來決定係數 a_k。

如果區域的境界線是沒有重點的單閉曲線，則可證明這樣作出的多項式當 $n\to\infty$ 時在 B 中一致地趨向一個變 B 爲圓的函數。

最後關於本節所說的第一個定理再說幾句話。函數(65)變圓 $|\tau|<R$ 爲區域 B，這區域的幾何性質，如多葉性或境界線的形狀，都可能是非常複雜的。對於他有時甚至沒有普通意義下的面積可言。因此這時區域 B 的面積祇能了解作他的部分區域 B_1 的面積的極限，當 B_1 如此擴大，使得 B 中任意一點必有屬於 B_1 的時候。若在普通意義之下 B 有面積，則這面積顯然等於上述 B_1 的面積的極限。

40．共軛三角級數法 這一節所說的是將單通區域 B 保角變換爲圓的函數的另一種逼近建造法。和前一節不同，我們現在所取的逼近多項式不在區域 B 所屬的 z 平面中而在單位圓所屬的 τ 平面中。爲簡單起見，且不失普遍性，可設圓心和 z 平面中的原點對應，且這原點含於區域 B 之中。假設函數

(75) $$z=a_1\tau+a_2\tau^2+\cdots$$

變單位圓 $C(|\tau|<1)$爲B。若 B 的境界線是單閉曲線，則可證級數(75)在閉圓 C 內爲一致收斂。在 C 的圓周上應有 $\tau=e^{i\varphi}$，$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$；由此可得區域 B 的境界 Γ 的方程：

(76) $$z=x+iy=a_1e^{i\varphi}+a_2e^{i2\varphi}+a_3e^{i3\varphi}+\cdots$$

或分開實數部分和虛數部分，且設 $a_k=\alpha_k-i\beta_k$，上式可改寫爲：

(77) $$x=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi);\quad y=\sum_{k=1}^{\infty}(-\beta_k\cos k\varphi+\alpha_k\sin k\varphi)。$$

特別，可設 a_1 是實數，即 $\beta_1=0$。方程(77)是區域 B 的境界線 Γ 的一種特別參數表示，即所謂共軛三角級數的參數表示[25]。我們稱這種表示爲曲線的標準參數表示。(76)式是這種表示的複數形式。反過來，假如區域 B 的境界線 Γ 有形式如(76)或(77)的標準參數表示，則以 τ^k 代替(76)式中的 $e^{ik\varphi}$，即得變單位圓爲 B 的函數。這時級數(76)在單位圓中顯爲一致收斂。因此我們的問題就歸結到尋求區域 B 的境界線 Γ 的標準參數表示式了。

先假設 Γ 的方程是隱函數的形式，並且可以寫成下面的樣子：

(78) $$x^2+y^2-1+\lambda P(x^2,y^2)=0,$$

其中 λ 是個常數，$P(x^2, y^2)$是祇含 x 和 y 的偶數冪的多項式。(78)式可以改寫爲複數形式。注意：$P(x^2, y^2)$可以看做

$$x^2+y^2=z\bar{z}\quad 和\quad 2(x^2-y^2)=z^2+\bar{z}^2$$

的多項式，從而方程(78)就可改寫爲：

(79) $$z\bar{z}-1+\lambda\sum_{l=0}^{l_0}\sum_{k=0}^{k_0}A_{kl}(z\bar{z})^k(z^2+\bar{z}^2)^l=0,$$

其中 A_{kl} 是實係數。因爲 Γ 關於坐標軸對稱，和[37]中處理正多角形的辦法相仿，我們可以證明在(77)式中應該有 $\beta_k=0$，$\alpha_{2k}=0$，因之複數形式的 Γ 的方程就變成：

(80) $$z=\alpha_1e^{i\varphi}+\alpha_3e^{i3\varphi}+\cdots,\qquad(\alpha_1>0)$$

這裏 α_{2k+1} 是實係數，故

(81)
$$\bar{z}=\alpha_1 e^{-i\varphi}+\alpha_3 e^{-i3\varphi}+\cdots$$

從而

(82)
$$\begin{cases} z\bar{z}=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{j-j'=p}\alpha_{2j+1}\alpha_{2j'+1}\right]e^{2ip\varphi} \\ z^2+\bar{z}^2=\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\sum_{j+j'=p}\alpha_{2j+1}\alpha_{2j'+1}\right]e^{i(2p+2)\varphi}+ \\ \qquad +\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\sum_{j+j'=p}\alpha_{2j+1}\alpha_{2j'+1}\right]e^{-i(2p+2)\varphi}\text{。} \end{cases}$$

以上關於 j 和 j' 相加時，其範圍仍各從 0 到 $+\infty$，但須滿足式中所寫的條件。將(82)式代入(79)式的左邊，把級數逐項乘開再依 $e^{i\varphi}$ 的冪次歸併在一起，因爲右邊是零，所以左邊每一項中 $e^{ik\varphi}$ 的係數都應該等於零。注意：在(82)式中只出現 $e^{i\varphi}$ 的偶數冪次，並且 $e^{i2p\varphi}$ 和 $e^{-i2p\varphi}$ 的係數相同。因此在(79)式左邊也有同樣的情形，而我們祗須置 $e^{i2p\varphi}(p>0)$ 的係數爲零就可得出全部的 α_l 應該滿足的條件了。

現在不擬寫出在一般情形時的全部計算，但由(82)的第一式知道可以得出下面一組的方程來：

(83)
$$\begin{cases} \alpha_1^2+\alpha_3^2+\alpha_5^2+\cdots+\lambda T_0(\alpha_{2j+1})=1 \\ \alpha_1\alpha_3+\alpha_3\alpha_5+\cdots+\lambda T_1(\alpha_{2j+1})=0 \\ \alpha_1\alpha_5+\alpha_3\alpha_7+\cdots+\lambda T_2(\alpha_{2j+1})=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

其中 $T_p(\alpha_{2j+1})$ 是含有係數 A_{kl} 和 α_{2j+1} 的某種一定形式。將(83)各式移項，第一式開平方，其餘各式用 α_1 來除，可得：

$$\alpha_1=\sqrt{1-[\alpha_3^2+\alpha_5^2+\cdots+\lambda T_0(\alpha_{2j+1})]}$$
$$\alpha_3=-\frac{\alpha_3\alpha_5}{\alpha_1}-\frac{\alpha_5\alpha_7}{\alpha_1}-\cdots-\frac{1}{\alpha_1}\lambda T_1(\alpha_{2j+1})$$
$$\alpha_5=-\frac{\alpha_3\alpha_7}{\alpha_1}-\frac{\alpha_5\alpha_9}{\alpha_1}-\cdots-\frac{1}{\alpha_1}\lambda T_2(\alpha_{2j+1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

將根式依牛頓二項式定理展開，得

(84)
$$\begin{cases} \alpha_1=1-\frac{1}{2}[\alpha_3^2+\alpha_5^2+\cdots+\lambda T_0(\alpha_{2j+1})]+ \\ \qquad +\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}[\alpha_3^2+\alpha_5^2+\cdots+\lambda T_0(\alpha_{2j+1})]^2+\cdots \\ \alpha_3=-\frac{\alpha_3\alpha_5}{\alpha_1}-\frac{\alpha_5\alpha_7}{\alpha_1}-\cdots-\frac{1}{\alpha_1}\lambda T_1(\alpha_{2j+1}) \\ \alpha_5=-\frac{\alpha_3\alpha_7}{\alpha_1}-\frac{\alpha_5\alpha_9}{\alpha_1}-\cdots-\frac{1}{\alpha_1}\lambda T_2(\alpha_{2j+1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

現在要用逐次迫近法來解這一組方程。我們取 α_j 的始值如下：

$$\alpha_1^{(0)}=1;\ \alpha_3^{(0)}=\alpha_5^{(0)}=\cdots=0\ 。 \tag{85}$$

將(85)代入(84)各式的右邊，略去所有含 λ 高於一次的各項，即得首次近似值：

$$\alpha_{2j+1}^{(0)}+\lambda\alpha_{2j+1}^{(1)}, \tag{86}$$

這裏如果把 $T_k(\alpha_{2j+1})$ 展開，可以證明當 j 相當大以後，(86)式之值爲零。

再將(86)代入(84)各式的右邊，然後略去所有含 λ 高於二次的各項，即得二次近似值：

$$\alpha_{2j+1}^{(0)}+\lambda\alpha_{2j+1}^{(1)}+\lambda^2\alpha_{2j+1}^{(2)}$$

和前面一樣，當 j 相當大以後上式之值爲零。其餘依此類推。可以證明這樣得到的無窮級數對於所有相當接近於零的 λ 爲收斂，並且確是我們所要的解.

例 1. 爲說明上述方法起見，可以用一個變單位圓爲橢圓內部的函數做例子。這橢圓的方程是：

$$x^2+y^2-1-\lambda(x^2-y^2)=0\ 。 \tag{87}$$

這方程也可改寫爲複數形式：

$$z\bar{z}-\lambda\frac{z^2+\bar{z}^2}{2}=1,$$

用公式(82)，可得下面一組無限個方程：

$$\begin{cases}\alpha_1^2+\alpha_3^2+\alpha_5^2+\alpha_7^2+\alpha_9^2+\alpha_{11}^2+\cdots=1\\ \alpha_1\alpha_3+\alpha_3\alpha_5+\alpha_5\alpha_7+\alpha_7\alpha_9+\cdots=\lambda\left(\frac{1}{2}\alpha_1^2\right)\\ \alpha_1\alpha_5+\alpha_3\alpha_7+\alpha_5\alpha_9+\alpha_7\alpha_{11}+\cdots=\lambda(\alpha_1\alpha_3)\\ \alpha_1\alpha_7+\alpha_3\alpha_9+\alpha_5\alpha_{11}+\cdots=\lambda\left(\frac{1}{2}\alpha_3^2+\alpha_1\alpha_5\right)\\ \alpha_1\alpha_9+\alpha_3\alpha_{11}+\cdots=\lambda(\alpha_1\alpha_7+\alpha_3\alpha_5)\\ \alpha_1\alpha_{11}+\alpha_3\alpha_{13}+\cdots=\lambda\left(\alpha_1\alpha_9+\alpha_3\alpha_7+\frac{1}{2}\alpha_5^2\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases} \tag{88}$$

引進新的變數 ρ_k，置：

$$\rho_0=\alpha_1;\ \rho_1=\frac{\alpha_3}{\alpha_1};\ \rho_2=\frac{\alpha_5}{\alpha_1};\ \cdots \tag{89}$$

於是(88)就可改寫爲：

$$\begin{cases}\rho_0=(1+\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots)^{-\frac{1}{2}}\\ \rho_1=\frac{1}{2}\lambda-\rho_1\rho_2-\rho_2\rho_3-\rho_3\rho_4-\rho_4\rho_5-\cdots\\ \rho_2=\lambda\rho_1-\rho_1\rho_3-\rho_2\rho_4-\rho_3\rho_5-\cdots\\ \rho_3=\lambda\left(\frac{1}{2}\rho_1^2+\rho_2\right)-\rho_1\rho_4-\rho_2\rho_5-\cdots\\ \rho_4=\lambda(\rho_1\rho_2+\rho_3)-\rho_1\rho_5-\cdots\\ \rho_5=\lambda\left(\rho_4+\rho_1\rho_3+\frac{1}{2}\rho_2^2\right)-\rho_1\rho_6-\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases} \tag{90}$$

第一個方程暫且不管，其餘的方程可用前面所說的逐次迫近法解之。這樣，如果算到 λ^5 爲止，可得：

$$\rho_1=\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{4}\lambda^3+\frac{3}{32}\lambda^5;\quad \rho_2=\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{9}{16}\lambda^4;$$

$$\rho_3=\frac{5}{8}\lambda^3-\frac{9}{8}\lambda^5;\quad \rho_4=\frac{7}{8}\lambda^4;\quad \rho_5=\frac{21}{16}\lambda^5;$$

而所有其餘的 ρ_k 都等於零。這裏我們取始值爲 $\rho_1^{(0)}=\rho_2^{(0)}=\cdots=0$。將上面諸式代入(90)的第一式的右邊，再用牛頓二項式公式展開，可以得到 ρ_0 的近似值，準確到 λ^5：

$$\rho_0=1-\frac{1}{8}\lambda^2+\frac{3}{128}\lambda^4。$$

知道 ρ_k 以後，由(89)可得 α_k：

$$\alpha_1=\rho_0;\quad \alpha_3=\rho_0\rho_1;\quad \alpha_5=\rho_0\rho_2;\quad \cdots$$

我們所求的變單位圓爲橢圓內部的函數(87)的近似多項式(到十次爲止)如下：

$$z=\left(1-\frac{1}{8}\lambda^2+\frac{3}{128}\lambda^4\right)\tau\left[1+\left(\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{4}\lambda^3+\frac{3}{32}\lambda^5\right)\tau^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{9}{16}\lambda^4\right)\tau^4+\left(\frac{5}{8}\lambda^3-\frac{9}{8}\lambda^5\right)\tau^6+\frac{7}{8}\lambda^4\tau^8+\frac{21}{16}\lambda^5\tau^{10}\right]。\tag{91}$$

例 2. 再看變單位圓爲平行於坐標軸的直線 $x=\pm1$ 和 $y=\pm1$ 所包圍的正方形內部的保角變換。正方形的方程可寫爲：

$$(1-x^2)(y^2-1)=0$$

或

$$x^2+y^2-1-x^2y^2=0。$$

引進參數 λ，可得一族的曲線：

$$x^2+y^2-1-\lambda x^2y^2=0。$$

其複數形式爲：

$$z\bar{z}-1+\lambda\left(\frac{z^2-\bar{z}^2}{4}\right)^2=0。$$

因爲正方形不但關於坐標軸爲對稱，並且對於坐標軸間的角平分線也是對稱，仿[37]的推斷，可知正方形的標準參數表示必定是下面的形式：

$$z=\alpha_1e^{i\varphi}+\alpha_5e^{i5\varphi}+\alpha_9e^{i9\varphi}+\cdots,\qquad (\alpha_1>0)$$

這裏 α_{4k+1} 就是我們所要求的係數。用前面一樣的辦法可得一無限方程組：

$$\left\{\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\alpha_5^2+\alpha_9^2+\cdots=\\
&=1+\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{\alpha_1^2}{2}\right)^2+(\alpha_1\alpha_5)^2+\left(\alpha_1\alpha_9+\frac{1}{2}\alpha_5^2\right)^2+(\alpha_1\alpha_{13}+\alpha_5\alpha_9)^2+\cdots\right]\\
&\alpha_1\alpha_5+\alpha_5\alpha_9+\alpha_9\alpha_{13}+\cdots=\\
&=\frac{\lambda}{2}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1^2}{2}\right)^2+(\alpha_1\alpha_5)\left(\frac{1}{2}\alpha_1^2\right)+\left(\alpha_1\alpha_9+\frac{1}{2}\alpha_5^2\right)(\alpha_1\alpha_5)+\cdots\right]\\
&\alpha_1\alpha_9+\alpha_5\alpha_{13}+\cdots=\\
&=\frac{\lambda}{2}\left[-\left(\frac{\alpha_1^2}{2}\right)(\alpha_1\alpha_5)+\left(\alpha_1\alpha_9+\frac{1}{2}\alpha_5^2\right)\left(\frac{1}{2}\alpha_1^2\right)+\cdots\right]\\
&\alpha_1\alpha_{13}+\cdots=\\
&=\frac{\lambda}{2}\left[-\left(\frac{\alpha_1^2}{2}\right)\left(\alpha_1\alpha_9+\frac{1}{2}\alpha_5^2\right)-\frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_5)^2+(\alpha_1\alpha_{13}+\alpha_5\alpha_9)\left(\frac{1}{2}\alpha_1^2\right)+\cdots\right]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.\tag{92}$$

但我們現在所感興趣的是 $\lambda=1$ 的情形，故可在(92)中置 $\lambda=1$，再取 α_{4k+1} 的始值爲：

$$\alpha_1=1;\quad \alpha_5=\alpha_9=\cdots=0,$$

然後用逐次迫近法來解這方程組。把上面的始值代入(92)，可得：

$$\alpha_1^2=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2;\quad \alpha_5=\frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right];\quad \alpha_9=\alpha_{13}=\cdots=0。$$

或 $$\alpha_1=1.0607;\quad \alpha_5=-0.0625;\quad \alpha_9=\alpha_{13}=\cdots=0。$$

把這些近似值代入(92)中，可得：

$$\alpha_1^2+(-0.0625)^2=1+\frac{1}{2}\left[\frac{(1.0607)^4}{4}+(1.0607)^2\cdot(-0.0625)^2+\frac{1}{4}(-0.0625)^4\right]$$

$$1.0607\,\alpha_5=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{(1.0607)^4}{4}+\frac{1}{2}(1.0607)^3\cdot(-0.0625)+\frac{1}{2}(-0.0625)^3\cdot1.0607\right]$$

$$1.0607\,\alpha_9=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(1.0607)^3(-0.0625)+\frac{1}{4}(-0.0625)^2\cdot(1.0607)^2\right]$$

$$1.0607\,\alpha_{13}=\frac{1}{2}\left[-\frac{3}{4}(1.0607)^2(-0.0625)^2\right]$$

$$1.0607\,\alpha_{17}=0。$$

故得以下諸近似值：

$$\alpha_1=1.0672;\quad \alpha_5=-0.0922;\quad \alpha_9=0.0181;\quad \alpha_{13}=-0.0015;\quad \alpha_{17}=0。$$

顯然，這逐次迫近法還可以繼續做下去，但要計算下一次的近似值時，必須把(92)中的展開式寫得更詳細一點，並且加進一些(92)中尚未寫出的新方程。在求新的近似值時，(92)各方程中除等式左邊第一項以外，其餘各項中的 α_i 都用已得的近似值代進去，又從第二個方程起，等式左邊第一項中的 α_1 也用已得的近似值代進去。

我們這例題中 α_i 的近似值準確到小數第四位的爲：

$$\alpha_1=1.0807;\qquad \alpha_5=-0.1081;\quad \alpha_9=0.0450;$$

$$\alpha_{13}=-0.0242;\quad \alpha_{17}=0.0174;\qquad \alpha_{21}=-0.0125。$$

注意下面的事實：當我們應用逐次迫近法而取始值爲 $\alpha_1=1,\ \alpha_5=\alpha_9=\cdots=0$ 時，所得到的無論那一次的近似值從某一個 α_i 起必定全都等於零。

除了上述的方法以外還有另一種方法，就是不求係數 α_{2j+1} 關於 λ 的展開式，而求(77)式或(76)式右邊關於 λ 的展開式。這樣再用逐次迫近法可得稍稍不同的結果。因此，現在要求曲線(78)的展開爲參數 λ 的正整數冪的級數的標準參數表示：

(93) $$x=x_0(\varphi)+x_1(\varphi)\lambda+x_2(\varphi)\lambda^2+\cdots;\quad y=y_0(\varphi)+y_1(\varphi)\lambda+y_2(\varphi)\lambda^2+\cdots,$$

其中 $x_0(\varphi)$ 和 $y_0(\varphi)$ 是曲線(78)當 $\lambda=0$ 時的標準參數表示，即圓 $x^2+y^2-1=0$ 的標準參數表示。換言之，在(93)式中有：

$$x_0(\varphi)=\cos\varphi;\quad y_0(\varphi)=\sin\varphi。$$

其他的係數 $x_k(\varphi)$ 和 $y_k(\varphi)$ 應該是共軛函數，即可以共軛三角級數來表示。將(93)代

入(78)式的左邊，然後置 λ 的各次幂的係數爲零，即可決定展開式中 λ 的係數。

例：試看前面已經研究過的橢圓的情形：

$$z\bar{z}-\frac{\lambda}{2}(z^2+\bar{z}^2)=1\,。\tag{94}$$

現在要求如下形式的標準參數表示：

$$z=x+iy=e^{i\varphi}+z_1(\varphi)\lambda+z_2(\varphi)\lambda^2+\cdots\tag{95}$$

其中

$$z_k(\varphi)=\alpha_1^{(k)}e^{i\varphi}+\alpha_3^{(k)}e^{i3\varphi}+\cdots\tag{96}$$

將(95)式代入(94)式左邊，得：

$$(e^{i\varphi}+z_1\lambda+z_2\lambda^2+\cdots)(e^{-i\varphi}+\bar{z}_1\lambda+\bar{z}_2\lambda^2+\cdots)-\frac{\lambda}{2}[(e^{i\varphi}+z_1\lambda+\cdots)^2+(e^{-i\varphi}+\bar{z}_1\lambda+\cdots)^2]=1\,。\tag{97}$$

置 λ 的係數爲零，得：　$e^{i\varphi}\bar{z}_1+e^{-i\varphi}z_1=\frac{1}{2}(e^{i2\varphi}+e^{-i2\varphi})$

或　$$R[e^{-i\varphi}z_1]=\frac{1}{2}\cos 2\varphi,$$

這裏 R 表實數部分。由(96)知上式即：

$$R[\alpha_1^{(1)}+\alpha_3^{(1)}e^{i2\varphi}+\cdots]=\frac{1}{2}\cos 2\varphi,$$

從而　$$\alpha_3^{(1)}=\frac{1}{2};\quad \alpha_1^{(1)}=\alpha_5^{(1)}=\alpha_7^{(1)}=\cdots=0。$$

代入(96)式得：

$$z_1=\frac{1}{2}e^{i3\varphi}\,。\tag{98}$$

回到(97)式，置 λ^2 的係數爲零，得：

$$e^{-i\varphi}z_2+e^{i\varphi}\bar{z}_2+z_1\bar{z}_1=e^{i\varphi}z_1+e^{-i\varphi}\bar{z}_1$$

或　$$R[e^{-i\varphi}z_2]=R[e^{i\varphi}z_1]-\frac{1}{2}z_1\bar{z}_1\,。$$

由(98)式有：　$R[e^{-i\varphi}z_2]=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cos 4\varphi,$

由(96)式知上式即：

$$R[\alpha_1^{(2)}+\alpha_3^{(2)}e^{i2\varphi}+\cdots]=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\,。$$

因此 $\alpha_1^{(2)}=-\frac{1}{8}$，$\alpha_5^{(2)}=\frac{1}{2}$，而其他的 $\alpha_{2\nu+1}^{(2)}$ 等於零。故

$$z_2=-\frac{1}{8}e^{i\varphi}+\frac{1}{2}e^{i5\varphi}\,。$$

仿這樣再做下去，可得：

$$z_3=-\frac{5}{16}e^{i3\varphi}+\frac{5}{8}e^{i7\varphi};\quad z_4=\frac{3}{128}e^{i\varphi}-\frac{5}{8}e^{i5\varphi}+\frac{7}{8}e^{i9\varphi}$$

最後,把這些結果代入(95)式,並改 $e^{ik\varphi}$ 爲 τ^k, 可得所求的保角變換的近似式:

$$z=\tau+\frac{1}{2}\tau^3\lambda+\left(-\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}\tau^5\right)\lambda^2+\left(-\frac{5}{16}\tau^3+\frac{5}{8}\tau^7\right)\lambda^3+ \\ +\left(\frac{3}{128}\tau-\frac{5}{8}\tau^5+\frac{7}{8}\tau^9\right)\lambda^4。\tag{99}$$

上面所說的方法爲抗脫羅維區教授所創,其詳情與收斂性的證明可以在他的原著中找到(數學彙報卷 40:3)。注意:若在(91)式中略去含 λ 四次以上各項卽得(99)式。

41. 穩定平面液流 已經講過保角變換的基本理論,現在再談複變數函數論在流體力學上的應用。設有穩定平面液流,其速勢爲 $\varphi(x, y)$,流函數爲 $\psi(x, y)$ [II, 74]。這時液流在每一點的速度可由下式來表示:

$$v_x=\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x};\quad v_y=\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\tag{100}$$

又

$$\psi(x_1, y_1)-\psi(x_0, y_0)=\psi(M_1)-\psi(M_0)\tag{101}$$

表示在單位時間內穿過連接兩點 M_0 和 M_1 的任意曲線的液量。我們假設液流不因時間而變,並且在所有和 XY 平面平行的平面上都是一樣的。嚴格地說,(101)式表示在單位時間內穿過平行於 z 軸,高度爲 1 的柱面的液量,這柱面的底線是 XY 平面上一條連接 $M_0(x_0, y_0)$和 $M_1(x_1, y_1)$兩點的曲線 l。如我們所知,函數 $\varphi(x, y)$和 $\psi(x, y)$之間存在下面的關係:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

這兩個式子實際上就是勾犀黎曼方程。由此可知複變數函數

$$f(z)=\varphi(x, y)+i\psi(x, y)\tag{102}$$

在液流所經過的區域中有導函數。函數(102)通常稱爲*流的複勢*。

以前曾提到過,函數 $\varphi(x, y)$和 $\psi(x, y)$可能是多值的,卽當繞過

區域內部某一點，或更一般，繞過某一孔時，函數值可能會增加一個常數。對於函數 $\psi(x, y)$ 而言，其多值性表明在這點有源頭，而對於函數 $\varphi(x, y)$，其多值性則表示在這點有初等渦旋。在這些場合之下 $f(z)$ 也就成爲多值函數，即當繞過這點(或孔)時其值可以增加一個常數。

由(100)式知道速度向量對應於複數

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\psi}{\partial x}。$$

從而這個複數顯然就是 $\overline{f'(z)}$[2]。故知 $f(z)$ 的導數的共軛複數表示流速向量。

再看對應於函數(102)的等溫網：

(103)　　$\varphi(x, y)=C_1;\quad \psi(x, y)=C_2$。

第一曲線族即所謂等勢曲線族，在這族中屬於同一曲線的點，液流的速勢都相等。第二族(流線)易知即液體質點的軌道。實際上，我們知道第二族和第一族是正交的，而流速向量[等於 grad $\varphi(x, y)$]的方向恰好合於第一曲線族的法線方向。因此穩定液流在每一點的流速向量常合於經過這點的第二族曲線的切線方向，就是說，第二曲線族即流線族，而這些流線在穩定液流中即液體質點的軌道。

直到現在我們祇限於運動學方面的討論，並且知道液流的任一可能分佈狀況可以藉一個稱爲流的複勢的正則函數來表示。反之，任一複勢決定液流的一個可能分佈狀況。現在我們證明由流體動力方程的滿足可以求出壓力的大小。寫出對於穩定平面液流的基本流體動力方程，假設體力有勢爲 $U(x, y)$。記住(100)式，可得下列兩個流體運動方程和一個連續方程[II, 115]：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

這裏 ρ 是液體的密度，$p(x, y)$是壓力。連續方程顯然滿足，因爲正則函數的實數部分是調和函數之故。前兩方程可以改寫爲：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-U+\frac{1}{\rho}p\right\}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-U+\frac{1}{\rho}p\right\}=0。$$

因此上式花括弧中的式子應該是個常數，故得下面的積分：

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-U+\frac{1}{\rho}p=C, \tag{104}$$

由這式子可以決定壓力 $p(x, y)$。在沒有體力的場合，置 $\rho=1$，得：

$$p=C-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{V}\right|^2=C-\frac{1}{2}\left|f'(z)\right|^2, \tag{105}$$

其中$|\overrightarrow{V}|$表示速度的大小。

注意：若代替 $f(z)=\varphi+i\psi$ 而取 $if(z)=-\psi+i\varphi$ 爲複勢，則等勢曲線變爲流線，流線變爲等勢曲線。因此任一正則函數的等溫網在本質上決定液流的兩種不同分佈狀況。

42．例題 I．所有我們以前看過的等溫網的例子現在都可用流體力學的眼光來看他們。如上節所說，每一個這種例子給我們兩種液流分佈狀況圖。

現在再看幾個新的例子。先從初等函數

$$f(z)=A\lg(z-a)=A\lg|z-a|+iA\arg(z-a)$$

的情形開始，這裏 a 是平面上一點，A 是實常數。現在等勢曲線是以 a 爲中心的圓，流線是經過 a 點的直線。繞 a 點一週函數 $f(z)$ 增加一個常數 $i2\pi A$，因此複勢的虛數部分（流函數）就增加 $2\pi A$，即以 a 點爲源頭，其強度爲 $2\pi A$。流速向量由複數

$$\overline{f'(z)}=\frac{A}{\overline{z-a}}$$

決定之。若以 ρ 和 φ 記複數 $z-a$ 的模和輻角，則流速向量對應於複數 $\frac{A}{\rho}e^{i\varphi}$。由此立刻可知當液流接近源頭時，其速度趨向無限，而當 A 爲正實數時，速度的方向從源頭出發向無限遠點，即 a 點確爲源頭而非尾閭。

再看比較一般的函數

$$f(z)=A\lg\frac{z-a}{z-b}=A\lg\left|\frac{z-a}{z-b}\right|+iA\arg\frac{z-a}{z-b}, \tag{106}$$

這裏 a 和 b 是平面上兩個不同的點，A 是實常數。此時等溫網由下面兩個方程決定：

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=C_1;\quad \arg\frac{z-a}{z-b}=C_2。$$

如我們所知，第一個方程表示一族圓，關於其中每一個圓 a 和 b 是對稱點，而第二個方程表示經過 a 和 b 的圓族[31]。這時 a 點是一個強度爲 $2\pi A$ 的源頭，而 b 點是個有同樣強度的尾閭。

II. 今設 a 和 b 兩點處在實軸上的 $-h$ 和 O，又取 $A=\frac{1}{h}$。則函數(106)成爲：

$$f(z)=\frac{1}{h}[\lg(z+h)-\lg z]。$$

當 $h\to 0$ 時得到表徵位於原點的偶源的複勢：

$$f_1(z)=\frac{1}{z}。$$

不難知道現在的等溫網是由經過原點而切於 Y 軸的曲線族(等勢曲線)和經過原點而切於 X 軸的曲線族(流線)所組成(圖 45)[31]。

III. 現在看函數

$$f(z)=iA\lg(z-a)=-A\arg(z-a)+iA\lg|z-a|,$$

其中 A 仍爲實常數。現在流線是以 a 爲中心的圓，而等勢曲線是從 a 出發的直線。由正方向繞 a 點一週，$f(z)$ 的實數部分(速勢)得到的改變量爲 $-2\pi A$，故在 a 點有一個強度爲 $-2\pi A$ 的初等渦漩。

IV. 取函數

$$f(z)=\frac{k}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \tag{107}$$

這在[33]中已經討論過的。分開實數和虛數部分，得到流線的方程：

$$\frac{k}{2}\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=C$$

或

$$ky(x^2+y^2-1)-2C(x^2+y^2)=0。$$

一般這是三次曲線。特別，當 $C=0$ 時得到圓 $x^2+y^2=1$ 和坐標軸 $y=0$。現在祇看平面在這圓以外的部分。我們可以說，有一條流線是由 $y=0$ 上的線段$(-\infty,-1)$和$(1,\infty)$以及上面所說的圓周所組合而成，這樣我們就有了一個在圓周外部的液流，他在這圓周上有個

環流。求 $f(z)$ 的導數：

$$f'(z)=\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right),$$

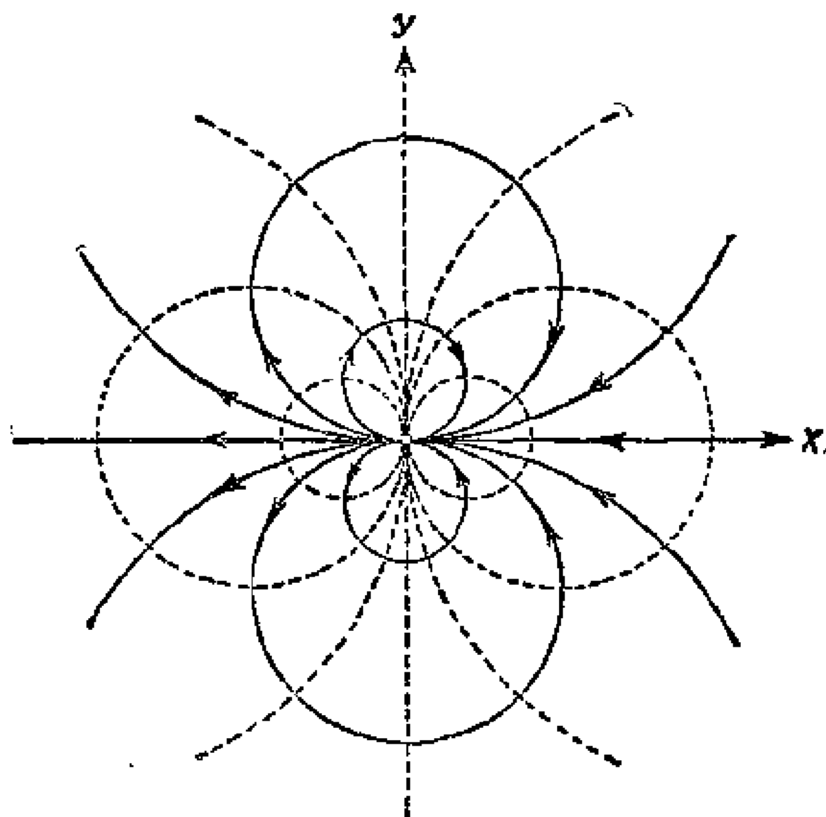


圖 45

知液流在無限遠點的速度等於 $\frac{k}{2}$ (k 是實數)，而在 $z=\pm 1$ 的速度爲零，這兩點是前述流線中直線段和圓周相接之點。

在函數 $f(z)$ 上加一個對數函數，則得另一函數

(108) $$f_1(z)=\frac{k}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-iA\lg z.$$

上式右邊第二項的虛數部分在圓周 $x^2+y^2=1$ 上的值常爲 $-A\lg 1=0$，所以當液流的複勢爲(108)時，這圓也是流線之一，但這時繞圓一週後，速勢得到改變量 $2\pi A$，所以在他的周圍有一個初等渦旋。圖 46_1, 46_2 和 46_3 表示當常數 $\frac{A}{k}$ 取不同的數值時流線的分佈。圖 46_2 所表示的液流在圓周 $x^2+y^2=1$ 上流線的入口和出口合於同一點。

∇ 我們在[33]中已知函數 $f(z)=\operatorname{arc}\cos\frac{z}{k}$ 的等溫網是以實軸上的 $\pm k$ 爲焦點的共焦點橢圓和雙曲線，如圖 47 所示。若取雙曲線爲流線，則所得液流分佈以實軸上的 $(-k, +k)$

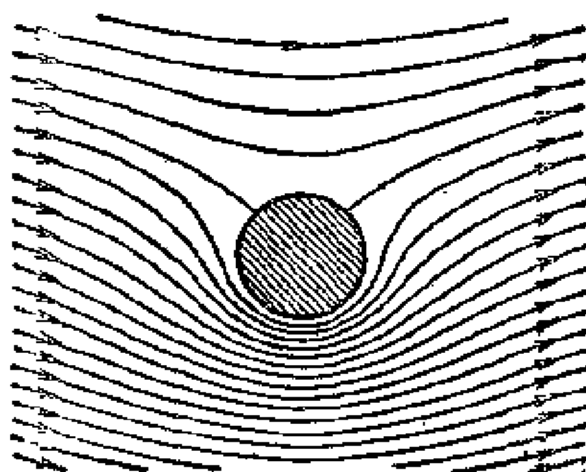


圖　46_1

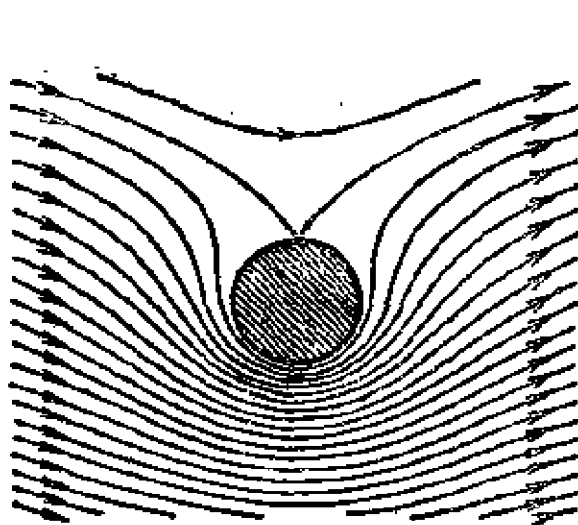


圖　46_2

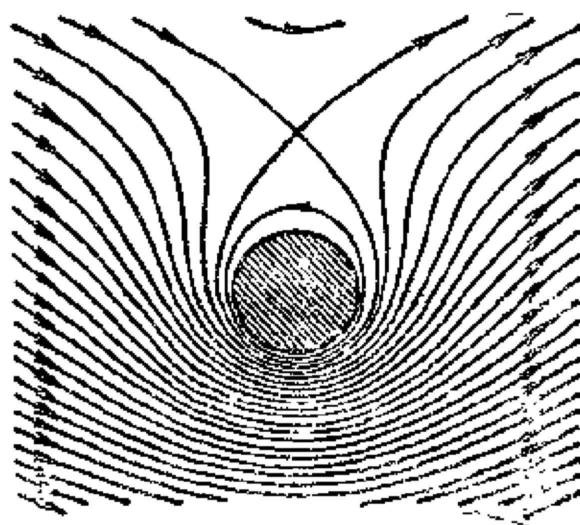


圖　46_3

爲水門。若取椭圓爲流線，則所得液流分佈以$(-k, +k)$爲環流。

VI. 有時研究流體力學的流線圖從複勢的反函數 $z=\varphi(w)$ 着手比從複勢 $w=f(z)$ 着手更爲便當。舉一個例子來看。設複勢的反函數爲

$$z=w+e^{w},$$

分開實數和虛數部分：

$$z=x+iy;\qquad w=\varphi+i\psi,$$

就有

$$x=\varphi+e^{\varphi}\cos\psi;\quad y=\psi+e^{\varphi}\sin\psi.$$

設 $\psi=C$ 就得到流線的參數式方程：

$$x=\varphi+e^{\varphi}\cos C;\quad y=C+e^{\varphi}\sin C,$$

其中 φ 是個變參數。試看兩條特別的流線，即對應於 $C=\pi$ 和 $C=-\pi$ 的。第一條的方程是

$$x=\varphi-e^{\varphi};\qquad y=\pi。$$

易知這流線是直線 $y=\pi$ 上的二重線段 $-\infty<x\leqslant-1$。同樣，對應於 $C=-\pi$ 的流線是二重線段 $-\infty<x\leqslant-1,\ y=-\pi$。此外，當 $C=0$ 時，流線是坐標軸 $y=0$（圖 48）。

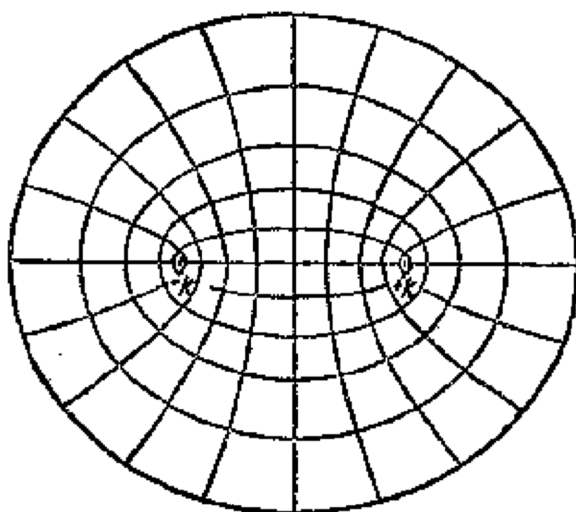


圖 47

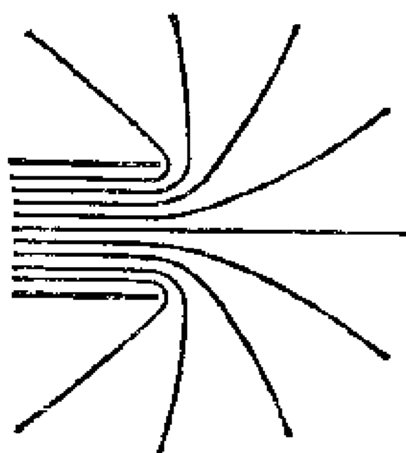


圖 48

43. 完全環流的問題 假設已知平面上一單閉曲線 l，我們要找尋在這曲線外部並且滿足下面兩個條件的液流：(1)曲線 l 應該是流線之一，(2)液流在無限遠點的速度的大小和方向應有一定。此外再要求複勢 $f(z)$ 是單值函數。不失一般性，可設在無限遠點的速度藉一個正實數 c 來決定（即取速度的方向爲實軸正方向，而其大小就等於 c）。

假設已知一函數將 z 平面上曲線 l 以外的部分保角變換爲 τ 平面上單位圓的外部 $|\tau|>1$。這種函數有無數之多，我們取的那一個是把無限遠點變爲他自己，並且不改變在這點的方向。對這函數 $\omega(z)$，$\omega'(\infty)$ 是正實數，故在 $z=\infty$ 鄰近有如下的展開式：

$$\tau=\omega(z)=bz+b_0+\frac{b_1}{z}+\cdots\qquad(b>0)。\tag{109}$$

在上一節中我們已經知道，對於圓的環流的問題複勢是：

(110) $$f_1(\tau)=\frac{k}{2}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right),$$

其中 k 是個實數，我們以後再決定他的數值。若將(109)式中的 τ 代入(110)式，則得到一個在曲線 l 外部的單值正則函數，他的虛數部分在曲線 l 上常爲定值，因爲(110)的虛數部分在圓周 $|\tau|=1$ 上的數值不變之故：

(111) $$f(z)=f_1[\omega(z)]=\frac{k}{2}\left[\omega(z)+\frac{1}{\omega(z)}\right]。$$

剩下來祇要決定常數 k，使得在無限遠點的速度等於 c 就好了。由(109)式和(110)式知在無限遠點顯有：

$$f'(z)=\frac{k}{2}\left[1-\frac{1}{\omega^2(z)}\right]\omega'(z) \quad 及 \quad f'(\infty)=\frac{k}{2}\cdot b,$$

由此立刻知道我們應該取 $k=\frac{2c}{b}$。所以在某一曲線上的完全環流的問題可以歸結到將這曲線外部的平面區域保角變換爲單位圓外部的問題。

可以證明若 $f(z)$ 爲單值，並且在 l 外部除單極點 $z=\infty$ 以外沒有其他奇異點，則問題的解答是唯一的。

44．朱可夫斯基公式 設 $f(z)$ 爲複勢，以曲線 l 爲環流，而在無限遠點的速度等於正實數 c。又設 $f(z)$ 不是單值函數，當環繞 l 一週時 $f(z)$ 的實數部分 $\varphi(x, y)$ 得到改變量 γ。液流在被環物上的壓力在兩坐標軸方向的分力顯然可用下面的線積分來表示：

(112) $$F_x=\int_l p(x, y)\cos(n, x)ds; \quad F_y=\int_l p(x, y)\cos(n, y)ds,$$

其中 $p(x, y)$ 表示壓力，n 是 l 的內法線的方向。

曲線的單元 $\overrightarrow{ds}$ 看做向量時對應於複數 $dz=e^{i\theta}ds$，這裏 θ 是曲線的切線和 OX 軸的交角。因爲以 i 乘一複數等於把他的輻角增加 $\frac{\pi}{2}$，所

以複數 $ie^{i\theta}ds$ 對應於長爲 ds 而方向是 l 的內法線方向的向量。故得:

(113)
$$F_x+iF_y=\int_l pi\,dz 。$$

由公式(105):

$$p=C-\frac{1}{2}|f'(z)|^2=C-\frac{1}{2}\left|\frac{df}{dz}\right|^2,$$

所以
$$F_x+iF_y=i\int_l C\,dz-\frac{i}{2}\int_l\left|\frac{df}{dz}\right|^2 dz,$$

但是顯然
$$\int_l dz=0,$$

又爲便利起見,把前面的等式兩邊都改寫爲他的共軛複數,得:

(114)
$$F_x-iF_y=\frac{i}{2}\int_l\left|\frac{df}{dz}\right|^2\overline{dz}=\frac{i}{2}\int_l\frac{df}{dz}\cdot\overline{\frac{df}{dz}}\,\overline{dz}=\frac{i}{2}\int_l\frac{df}{dz}\overline{df} 。$$

因曲線 l 是流線,故在其上 $\psi(x, y)$爲常數: $\psi(x, y)=C_1$, 因此在 l 上有:

$$f(z)=\varphi(x, y)+iC_1,\quad \overline{f(z)}=\varphi(x, y)-iC_1,$$

從而 $df=\overline{df}$。將(114)式的兩邊乘以 i, 卽得:

$$R=F_y+iF_x=-\frac{1}{2}\int_l\frac{df}{dz}df,$$

這式子完全決定了被環物所受到的總壓力向量。他也可改寫爲:

(115)
$$R=F_y+iF_x=-\frac{1}{2}\int_l\left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz 。$$

我們已經假設 $f'(z)$ 在 l 外部爲正則單值。在無限遠點鄰近他應該有下面的展開式:

(116)
$$f'(z)=c+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots,$$

其中 c 就是已給的在無限遠點的速度。函數 $f(z)$在無限遠點鄰近當然就有下面的展開式:

$$f(z)=C+cz+b_1\lg z-\frac{b_2}{z}+\cdots,$$

故當沿正方向環繞 l 一週時 $f(z)$ 的改變量顯爲 $i\,2\pi b_1$，而這就是我們前面的 γ。所以應該有 $b_1=\frac{1}{2\pi i}\gamma$，代入(116)式得：

$$f'(z)=c+\frac{\gamma}{2\pi iz}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots$$

平方得：

(117)
$$[f'(z)]^2=c^2+\frac{c\gamma}{\pi iz}+\frac{d_2}{z^2}+\cdots$$

由勾犀定理[5]我們知道要計算積分(115)，不必沿曲線 l 去積分面祇要沿一條環繞曲線 l，在無限遠點鄰域中的閉曲線積分好了。對這積分，由(117)式不難知道[21]：

$$R=F_y+iF_x=-\frac{c\gamma}{2\pi i}2\pi i=-c\gamma,$$

卽

(118)
$$F_y=-c\gamma;\quad F_x=0。$$

這公式最先爲朱可夫斯基所得。

45. 平面靜電問題　現在來看複變數函數論在靜電學上的應用。我們這裏所研究的問題大部分和以上各節相類似。首先解釋平面靜電問題的內容。我們知道一個帶有電量 e 的電荷在空間產生一個電場。由庫倫定律電場強度可用公式

$$f=\frac{e}{\rho^2}$$

來表示，這裏 ρ 是要測定電場強度之點 M 和電荷之間的距離。在 M 點所受到的力是沿着兩點的連線從電荷向 M 的。現在假設有一條和 Z 軸平行的帶電直線和 XY 平面交於一點 O，且在其上電量是均勻分佈的。以 e 表示直線上單位長度所帶的電量。顯然，在所有和 XY 平

面平行的平面上,靜電場的分佈是完全一樣的,所以祇要討論 XY 平面上的好了。因爲對稱的緣故,平面上任一點 M 所受到的力是一個仍在這平面上的向量,從 O 點沿線段 OM 向 M。直線上線段 dz 所帶的電量是 $e\cdot dz$。要知道坐標爲 $(x, y, 0)$ 的 M 點所受到的力,我們應該計算所有這些線段 dz 作用於 M 的力在 $\overline{OM}$ 上的分力的總和。

作用力的大小可表示爲:

$$\frac{edz}{x^2+y^2+z^2},$$

這裏我們假設 O 是原點。上式尙須以 $\cos\varphi$ 乘之,其中 φ 爲 Z 軸上變動點 N 至 M 之向量 $\overline{NM}$ 與向量 $\overline{OM}$ 間之交角。因 ONM 原爲直角三角形,故得。

$$\cos\varphi=\frac{r}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad z=r\operatorname{tg}\varphi,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。含點 N 的甚小線段 dz 作用於 M 的力在 $\overline{OM}$ 上的分力是:

$$\frac{e\cos\varphi\,dz}{x^2+y^2+z^2}$$

而 M 點所受到的力的總和是:

$$f=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e\cos\varphi\,dz}{x^2+y^2+z^2}$$

改變數 z 爲 φ,即得 $$f=\frac{e}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi$$

或

$$f=\frac{2e}{r}\qquad(r=\sqrt{x^2+y^2})。\tag{119}$$

對應的勢函數爲:

$$V(x, y)=2e\lg\frac{r_0}{r},\tag{120}$$

這裏 r_0 是任意常數,假定是正的。這樣對數勢(120)就成爲平面靜電

問題中的基勢，好像是由一個質點電荷所產生的一般，如果我們忽略空間其他部分而祇看 XY 平面的話。注意：基勢(120)和三度空間中的通常牛頓勢函數 $1/r$ 不同，前者在無限遠點之值爲 ∞，而後者在無限遠點之值爲零，這就是平面靜電問題的基本特點。若帶電體不是一條直線而是一個以 XY 平面上的區域 B 爲底的圓柱體，則代替基勢(120)而有下面的勢函數：

(121) $$V(x, y)=2\iint\limits_B \rho(\xi, \eta)\lg\frac{r_0}{r}\,d\xi\,d\eta,$$

其中 $\rho(\xi, \eta)$ 是密度，r 是區域 B 中的變動點 (ξ, η) 到 $M(x, y)$ 這點的距離：

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}。$$

同樣，如果帶電體是一個圓柱面，則電勢可用線積分來表示。又我們知道函數 $\lg r$ 和(120)都滿足拉普拉斯方程[II, 119]：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0。$$

勢函數(121)在帶電體外部，卽在區域 B 的外部也滿足上面的方程。

但我們可以把任一調和函數看做一個正則複函數的實數或虛數部分。因此現在的電勢 $V(x, y)$ 也可以當做某一正則函數的虛數部分：

(122) $$f(z)=U(x, y)+iV(x, y)。$$

這樣，任一帶電體外部的靜電分佈決定一個正則函數 $f(z)$（複勢），反之，任一正則函數也決定平面電場的一種靜電分佈。

在前面的場合之下，函數的兩族等溫網

(123) $$U(x, y)=C_1;\quad V(x, y)=C_2$$

都有簡單的物理意義。(123)的第二曲線族卽等勢曲線族，而和他正交的第一曲線族則爲力線族，卽曲線上每點的切線方向就是力的作用方

向。這時作用力的兩個分力向量如下：

$$F_x = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x};\qquad F_y = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

或由勾犀黎曼方程有：

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x};\qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial x}。$$

因此他就對應於複數

$$F_x + iF_y = -\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial x} = -i\overline{f'(z)}\ 。\tag{124}$$

假如我們有一個閉的有界的導體，則在其內部電勢常一定不變，靜電學中證明導體表面電量的密度可由下面的公式來計算，除了符號不能確定外：

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

或由(124)式可改寫爲

$$\rho = \frac{1}{4\pi}|f'(z)|。\tag{125}$$

容易看出所有這些概念和平面流體力學方面對應概念之間類似的地方來。

46. 例題 I. 所有我們以前看過的等溫網的例子現在都可以用靜電學的眼光去解釋他們。例如看函數

$$f(z) = i\,2e\,\lg\frac{z-a}{z-b}。\tag{126}$$

在任何 a 和 b 關於他成對稱點的圓周上這函數的虛數部分常取定值[31]。現在取兩個這種圓周 C_1 和 C_2，並設函數(126)的虛數部分在其上分別取定值 V_1 和 V_2。若以這兩個圓周做底線，而母線平行於 Z 軸做兩個圓柱面，則複勢 (126) 決定兩柱面之間一靜電場的分佈，而 V 和 V_2 是在這兩圓柱面上電勢的值。

注意：一般定義兩導線 l_1 和 l_2 之間的環域中的靜電場時，複勢的虛數部分在 l_1 和 l_2 上應該取定值。這樣，複勢 $f(z)$ 應該將上述環域變爲在兩條平行於實軸的直線之間的帶域。這變換當然不會是單值的，因爲環是二重連通區域，而帶是單通區域。在前面這例子中函數

(126)在圓周 C_1 和 C_2 之間的環域內顯然是多值函數。

函數(126)所決定的電場還有一個特點可以注意的。這函數可以改寫成：

$$f(z)=i\,2e\lg(z-a)-i\,2e\lg(z-b),$$

用這式子可以證明兩條導線帶有相同的電量，但其一爲正電另一爲負電。與此相符，函數(126)：

$$f(z)=i\,2e\lg\frac{1-\frac{a}{z}}{1-\frac{b}{z}}$$

將在無限遠點 $z=\infty$ 爲正則。

II. 如果我們想定義在兩條無限導線之間的靜電場（圖 49），則因兩導線間的區域爲單連的，問題就歸結到找一個變換，將這區域變爲兩條平行於實軸的直線之間的帶域。例如，若這兩條導線是直線 $y=\pi$ 和 $y=-\pi$ 上的線段 $-\infty<x\leqslant-1$，則函數 $z=w+e^w$ 的反函數就是我們所要的變換，而圖 48 則表示這靜電場中的等勢曲線。注意：兩導線的端點 $(-1,\pi)$ 和 $(-1,-\pi)$ 對應於 $w=\pm\pi i$，而 $e^w=-1$。但由公式(124)所決定的作用力的大小是：

$$\sqrt{F_x^2+F_y^2}=|f'(z)|=\left|\frac{dw}{dz}\right|=\left|\frac{dz}{dw}\right|^{-1},$$

在我們的情形，
$$\sqrt{F_x^2+F_y^2}=|1+e^w|^{-1},$$
故在導線的端點作用力爲無限大。

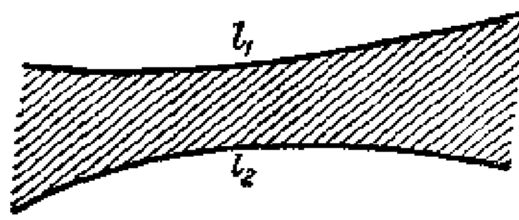


圖 49

這例子是下面我們要說的更一般的例子的一個特別情形。假設有兩條導線如圖 50 所示：AB 和 AC 是兩條平行的半射線，其中 B 和 C 的連線要和這兩半射線垂直。又 BD 和 AB 的交角，CD 和 AC 的交角都等於 $\alpha=\mu\pi$。再畫一條和 AB, AC 兩線平行且距離相等的直線 PQ。在 PQ 和折線 ABD 之間的平面區域可以看做一個三角形，其在頂點 B 和 P 的角度等於 $(\mu+1)\pi$ 和零。把這三角形變換爲上半平面，使得頂點 B, P, Q 對應於 $\tau=-1, 0, \infty$。由公式(47)有：

$$z=a\int_0^\tau(\tau+1)^\mu\,\tau^{-1}d\tau, \tag{127}$$

把 z 平面轉動我們可以使得常數 a 是正實數。這裏 z 平面就是圖 50 所示的平面，而 τ 平面就是和前述這三角形對應的上半平面所屬的平面。由對稱原理，三角形 BPQ 關於 PQ 的

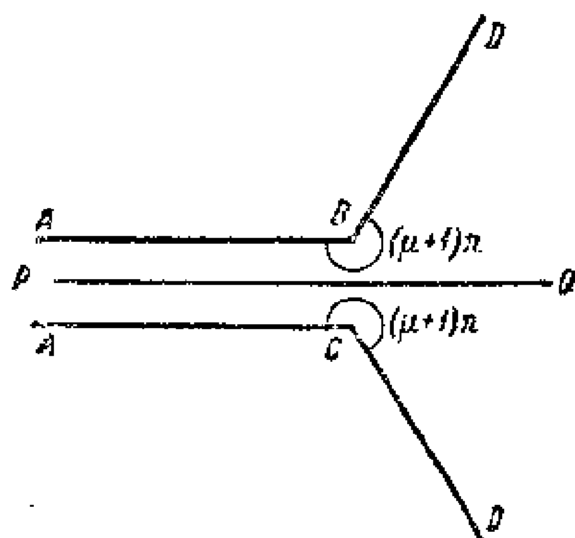


圖　50

反射，即三角形 CPQ 的像是上半 τ 平面關於實軸上的線段 $0<\tau<+\infty$ 的反射，即下半 τ 平面。因此在兩導線之間的平面區域變換爲全 τ 平面除去實軸上的割線 $(-\infty, 0)$。若置

$$\tau=e^w,$$

則由指數函數的性質[19]知道 τ 平面在這變換之下對應於 w 平面上的帶域：

$$-\pi\leqslant I[w]\leqslant\pi,$$

這裏 I 表示虛數部分。因此若把 w 看做 z 的函數，則在上面所說兩條導線上 w 的虛數部分取定值 $\mp\pi$，故可當作兩導線間平面靜電場的複勢。由 $\tau=e^w$ 可將(127)式改寫爲：

$$(128)\qquad z=a\int^w (e^w+1)^\mu dw\text{。}$$

常數 a 的值顯然可由半射線 AB 和 AC 的距離來決定。假設這距離等於 $2b$。在 z 平面和無限遠點 $z=-\infty$ 鄰近的地方，由等勢曲線族和力線族所組成的等溫網易知和直角坐標網很是類似，這等溫網對應於 w 平面上寬度爲 2π 的帶域中的直角坐標網。$z=-\infty$ 點對應於 $\tau=0$，故對應於 $w=-\infty$。因 z 平面中 AB 和 AC 間的半帶域的寬度爲 $2b$，又當 $w\to-\infty$ 時 $e^w\to 0$，故由(128)，$\dfrac{dz}{dw}\to a$。由此可知常數 a 應該等於 $\dfrac{b}{\pi}$。現在試看 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 的特別情形，即當 BD 和 CD 垂直於 AB 和 AC 的時候。

這時

$$(129\qquad z=\frac{b}{\pi}\int^w \sqrt{e^w+1}\,dw,$$

這積分可藉變換 $e^w+1=t^2$ 計算出來。

積分的下限變動時 z 的值有一常數之增減，即相當於 z 平面上的一個平行移動，所以在(129)式中不寫出積分下限也沒有什麼大關係。

III. 設一柱形導體在 XY 平面上的截痕是單閉曲線 l。沿 Z 軸方向單位長度的導體上所帶的電量設爲 e。現在要求 l 外部的平面靜電場。先把 z 平面上 l 的外部照像於 τ 平面上單位圓的外部 $|\tau|>1$，使得無限遠點和他自己對應。則在 $z=\infty$ 的鄰域中這保角函數有如下的展開式：

$$(130)\qquad \tau=\omega(z)=cz+c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots$$

現在要證明由上面這保角函數可以決定一個複勢，因而得到 l 外部的一個靜電分佈。實際上，作函數

$$f(z)=i2e\lg\frac{\tau_0}{\tau} \qquad [\tau=\omega(z)]$$

其中 τ_0 是個不關緊要的常數。這函數的虛數部分是：

$$I[f(z)]=2e[\lg|\tau_0|-\lg|\tau|]。$$

因為在曲線 l 上 $|\tau|=1$，可知虛數部分在 l 上也取一定常數值。現在要決定這勢函數在無限遠點鄰近的值。由(130)的展開式，知道 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 鄰近可展開為：

$$f(z)=-i\,2e\lg z+d_0+\frac{d_1}{z}+\cdots$$

這展開式中的主要部分給出勢函數 $-2e\lg|z|$，由(120)式知道他恰對應於導體上已給的電量。依照公式(125)，l 上電量分佈的密度為：

$$\rho=\frac{1}{4\pi}|f'(z)|=\frac{e}{2\pi}\cdot\left|\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dz}\right|$$

或因 $|\tau|=1$，有：

(131) $$\rho=\frac{e}{2\pi}\left|\frac{d\tau}{dz}\right|=\frac{e}{2\pi}\left|\frac{dz}{d\tau}\right|^{-1}。$$

若 l 為正方形，則 τ 和 z 的關係如下[37]：

(132) $$z=a\int^{\tau}\frac{\sqrt{\tau^4+1}}{\tau^2}d\tau,$$

這時圓周 $|\tau|=1$ 上的點

$$e^{\frac{(\pi+2k\pi)i}{4}} \qquad (k=0,1,2,3)$$

和正方形的頂點對應。

由(132)式有：
$$\frac{dz}{d\tau}=a\frac{\sqrt{\tau^4+1}}{\tau^2},$$

而(131)式這時可寫為：
$$\rho=\frac{e}{2\pi a}\left|\frac{\tau^2}{\sqrt{\tau^4+1}}\right|,$$

其中 a 是個常數，要由正方形的邊長來決定。在正方形的邊上有 $\tau=e^{i\varphi}$，這裏 φ 是單位圓中的中心角。正方形的一邊對應於 φ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$ 中變動時單位圓上的弧，因此正方形的邊長可以用下面的式子來表示：

$$s=a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{e^{i4\varphi}+1}}{e^{i2\varphi}}ie^{i\varphi}d\varphi,$$

經過簡單的變換可得

(133) $$s=a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\theta}\,d\theta.$$

他決定正方形的邊長 s 和常數 a 之間的關係。上式右邊的積分不能用初等函數來表示，是

一個橢圓積分。

47. 平面磁場 以上兩節所講的是解析複變數函數和平面電場的關係。同樣，我們也可以去研究由一條和 XY 平面垂直的無限直線上的電流在這平面上所產生的磁場。下面舉一些這方面最基礎的結果，證明從略。

對磁力向量有下面的公式：

$$H_x=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad H_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\tag{134}$$

函數 φ 在磁源以外的磁場中應該滿足拉普拉斯方程，因此是某一解析函數的實數部分：

$$f(z)=\varphi+i\psi。\tag{135}$$

由勾犀黎曼方程可將(134)式改寫爲：

$$H_x=-\frac{\partial\psi}{\partial x};\quad H_y=-\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

或

$$\vec{H}=-\text{grad}\,\psi,$$

所以 ψ 是磁場的無向勢。

曲線 $\varphi(x,y)=C_1$ 和曲線 $\psi(x,y)=C_2$ 正交，故爲磁力線。當強度爲 q 的電流在一條位於 Z 軸的導線上通過時，對應的函數(135)是：

$$f(z)=-2q\lg z,$$

從而 $\varphi=-2q\lg r$，$\psi=-2q\arg z$。磁力線是以原點爲中心的圓周，又當繞原點一周時無向勢 ψ 得到改變量 $(-4\pi q)$。在這情形之下，導磁體的表面(導磁係數等於無窮大)應該合於某一曲線 $\psi(x,y)=C_2$。

48. 舒伐爾茲公式 以上幾節所講的解析複函數在流體力學和靜電學上的應用根本上還是基於調和函數與解析複函數間的一個密切關係。這關係我們早已在[2]中指出過了。

現在把這關係的要點再說一遍：解析函數的實數部分和虛數部分都是調和函數，反之，任一調和函數可以看做是某一解析函數的實數部分，這時解析函數的虛數部分除了一個常數項以外可以完全決定，換言之，解析函數可由其實數部分完全決定，除了一個虛常數項之外。我們以前曾經說過[II, 194]，有界區域中的調和函數由其在境界線上的函數值唯一決定(狄義赫利問題)。所以和上面所說的關係合在一起，知道成立下面的結果：在一個以 l 爲境界線的區域 B 中，除了一個虛常數

項之差以外，可以唯一決定一正則函數 $f(z)$，使得他的實數部分在 l 上取已定的數值。一般當 B 是任意區域時，這問題的解答不能用簡單的公式來表示，就是說，不能用實數部分在境界線上的值來表示區域 B 中的正則函數。但是對於圓這種公式不難求得，下面就是求這公式的方法。

設有一圓以原點爲中心，半徑等於 R 。設 $u(x, y)$ 是所求的解析函數的實數部分。這調和函數可以由他在圓周上的數值 $u(\varphi)$ 藉卜阿桑積分完全決定，其式如下[II, 196]：

$$(136)\quad u(x, y)=u(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi \quad (r<R)。$$

易知卜阿桑積分的核，卽積分符號之內的分式，是某一解析函數的實數部分：

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\varphi-\theta)+r^2}=\text{實數部分}\left[\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\right] \quad (z=re^{i\theta}=x+iy)。$$

如果在卜阿桑積分中把他的核換成上面這解析函數，則這積分就成爲複變數 z 的函數，其實數部分恰好就是 $u(x, y)$。這函數的形式如下：

$$(137)\qquad f(z)=u(x, y)+iv(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\varphi)\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi。$$

在這式中置 $z=0$，得到 $f(z)$ 的值爲實數，故知公式(137)所決定的解在原點取實數值。若以 Ci 表示所求的函數在原點的值的虛數部分，則我們的問題的一般解爲：

$$(138)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\varphi)\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi+Ci。$$

這公式通常稱爲舒伐爾玆公式。

若將上式積分符號內的分式分爲實數和虛數部分，則知

$$虛數部分\left[\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\right]=\frac{2rR\sin(\theta-\varphi)}{R^2-2rR\cos(\varphi-\theta)+r^2},$$

因此可將正則函數的虛數部分在圓內用實數部分在圓周上的數值來表示:

$$(139)\qquad v(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\varphi)\frac{2rR\sin(\theta-\varphi)}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi+C。$$

以上所說的這些和共軛三角級數的概念有密切的關係。

假定

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)$$

是 $f(z)$ 的實數部分的境界值 $u(\varphi)$ 的福里哀級數。這時,如[II, 195]中所證, $f(z)$ 的實數部分在圓內可以用下面的三角級數來表示:

$$(140)\qquad u(x,\ y)=u(r,\ \theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n。$$

而虛數部分則可以用共軛三角級數來表示:

$$(141)\qquad v(x,\ y)=v(r,\ \theta)=C+\sum_{n=1}^{\infty}(-b_n\cos n\theta+a_n\sin n\theta)r^n。$$

如果函數 $u(\varphi)$ 滿足適當的條件,例如,有一次導數並且滿足狄義赫利條件,則級數(140)和(141)在整個閉圓中為一致收斂,而函數 $v(r,\ \theta)$ 在圓內爲調和,且在閉圓中爲連續。 $v(r,\ \theta)$ 通常稱爲 $u(r,\ \theta)$ 的共軛函數[2],他的境界值 $v(1,\ \varphi)$ 也稱爲 $u(\varphi)$ 的共軛函數。

假設有兩個舒伐爾兹積分在圓內決定同一的正則函數:

$$(142)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u_1(\varphi)\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u_2(\varphi)\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi,$$

其中 $u_1(\varphi)$ 和 $u_2(\varphi)$ 是連續實函數。易知這兩函數 $u_1(\varphi)$ 和 $u_2(\varphi)$ 必定全同,因爲他們是同一個調和函數的境界值,這調和函數即正則函數的實數部分。這樣,關於 z 的恆等式(142)和關於 φ 的恆等式 $u_1(\varphi)=u_2(\varphi)$ 完全相抵。實際上,這就是[8]中已說過的哈爾諾克定理。

49. 核 $\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}$ 現在我們要把關於勾犀型積分的境界值的基本定理應用到單位圓圓周 $|z|=1$ 的情形。設在這圓周上已給一個滿足黎浦希茲條件的實函數 $u(\tau)$，這裏 $\tau=e^{is}$。我們可以用舒伐爾茲公式 [48] 做一個在圓周內部的正則函數，其實數部分在圓周上的值即 $u(\tau)$：

$$u(re^{i\varphi})+iv(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\tau)\frac{\tau+z}{\tau-z}ds \qquad (z=re^{i\varphi}) \tag{143}$$

或由 $d\tau=i\tau ds$，得：

$$u(re^{i\varphi})+iv(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}u(\tau)\frac{\tau+z}{\tau(\tau-z)}d\tau。$$

記 $\tau+z=(\tau-z)+2z$，再把積分分做兩部分，得：

$$u(re^{i\varphi})+iv(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\tau)ds+\frac{2z}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{u(\tau)}{\tau}\cdot\frac{1}{\tau-z}d\tau。$$

設 $z=re^{i\varphi}$ 趨向圓周 $|z|=1$ 上的點 $\xi=e^{it}$ 爲極限。應用關於勾犀型積分的境界值的定理[28]，即得上式中的函數在圓周上 $\xi=e^{it}$ 點的極限值：

$$u(e^{it})+iv(e^{it})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\tau)ds+\xi\frac{u(\xi)}{\xi}+\frac{2\xi}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{u(\tau)}{\tau}\frac{1}{\tau-\xi}d\tau,$$

或

$$u(e^{it})+iv(e^{it})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\tau)ds+u(\xi)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\tau)\frac{2\xi}{\tau-\xi}ds \tag{144}$$

但

$$\frac{2\xi}{\tau-\xi}=\frac{2e^{it}}{e^{is}-e^{it}}=-1+i\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2},$$

代入(144)式中即得函數的虛數部分的境界值藉實數部分的境界值來表示的公式：

$$v(e^{it})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(e^{is})\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}ds,$$

這時積分取主值。改寫 $u(e^{is})$ 和 $v(e^{it})$ 爲 $u(s)$ 和 $v(t)$：

$$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(s)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}ds。 \tag{145}$$

公式 (143) 所定義的單位圓內的正則函數在圓心 $z=0$ 取實值，故其虛數部分在圓心之值爲零。但由[II, 194]，調和函數在圓心的值等於他在圓周上的值的算術平均值，故知：

$$\int_{-\pi}^{+\pi}v(t)dt=0, \tag{146}$$

函數 $u(s)$ 是週期爲 2π 的週期函數，故 $v(t)$ 也是週期函數，因此在 (145) 式中可取任一長爲 2π 的區間做積分的區間。函數 $\operatorname{ctg} z$ 以 $z=0$ 爲單極點，留數爲 1 [21]。故 (145) 中積分的核可用勾犀核來表示：

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}=-\frac{1}{s-t}+P(t-s), \tag{147}$$

其中 $P(s)$ 是線段 $-2\pi<s<2\pi$ 中的解析正則函數。和在[27]中一樣,可以證明若週期函數 $u(s)$ 滿足指數 α 的黎浦希茲條件,則當 $\alpha<1$ 時,$v(t)$ 也滿足指數 α 的黎浦希茲條件;當 $\alpha=1$ 時,$v(t)$ 滿足任意指數小於 1 的黎浦希茲條件。由(147)式知道這事實也可由 [27] 中對應的事實導出。

對函數 $v(t)$ 我們又可由線性變換(145)得到另一滿足黎浦希茲條件的函數 $w(t_1)$:

$$w(t_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} v(t)\operatorname{ctg}\frac{t_1-t}{2}dt,$$

如果把 $v(t)$ 當做某一正則函數的實數部分在圓周上的境界值,則函數 $w(t_1)$ 就是這函數的虛數部分的境界值,且有:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} w(t_1)dt_1=0, \tag{148}$$

另一方面,若以 $(-i)$ 乘正則函數(143),則得正則函數 $v(re^{i\varphi})-u(re^{i\varphi})i$。但當正則函數的實數部分已定時,其虛數部分除了一個常數項以外可以完全決定,故有:

$$w(t_1)=-u(t_1)+C。$$

要決定常數 C 可將上式兩邊在區間 $(-\pi,\ +\pi)$ 上積分,由(148)式有:

$$0=-\int_{-\pi}^{+\pi} u(t_1)dt_1+2\pi C,$$

從而

$$w(t_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} v(t)\operatorname{ctg}\frac{t_1-t}{2}dt=-u(t_1)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(s)ds, \tag{149}$$

即兩次應用變換(145)所得的函數除一常數項外是原來的函數變一符號。上式也可改寫為:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} u(s)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}ds\right]\operatorname{ctg}\frac{t_1-t}{2}dt=-u(t_1)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(s)ds, \tag{150}$$

這是著名的希爾伯脫公式,而變換(145)的核也就稱為希爾伯脫核。注意:在公式(150)的左邊積分次序不能變更,好像在福里哀積分中一樣。設以 h 表示變換(145),則該式可寫為下之形式:

$$v(s)=h[u(s)],$$

這裏等式兩邊函數的變數都用 s 記之。用這記號,希爾伯脫公式(150)可改寫為:

$$h^2[u(s)]=u(s)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(s)ds。$$

當 $v(t)$ 已給時(145)式可以看做 $u(s)$ 的積分方程。由上所證知道這方程有解的必要條件是 $v(t)$ 要滿足(146)的關係。由(149)式可以知道函數

$$u(s)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} v(t)\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}dt \tag{151}$$

是(145)的一個解。他同時也是滿足條件:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} u(s)ds=0$$

的方程(149)的解。換言之，函數(151)是正則函數 $v(re^{i\varphi})-iu(re^{i\varphi})$ 的虛數部分，並且在原點等於零。如果函數 $u(re^{i\varphi})$ 在原點等於 C，則

(152) $$u(s)=C-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}v(t)\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}dt,$$

這時 $u(s)=\text{const.}$ 是齊次方程

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(s)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}ds=0$$

的解。因爲如果 $u(s)=\text{const.}$，則虛數部分 $v(s)=\text{const.}$，但已知 v 在原點等於零，故由(146)知 $v(s)=0$。(152)式是方程(145)的解的一般形式，因爲實數部分可以完全決定虛數部分，除了一個常數項以外。在以上的論斷中我們假設已給的和所求的函數都滿足黎浦希茲條件。

和[26]中對勾庫型積分一樣，我們可以把變換(145)寫成普通的廣義積分。實際上，因爲 $u(s)=c$ 時 $v(s)=0$，故

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}ds=0,$$

而(145)式便可改寫爲：

(153) $$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[u(s)-u(t)]\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}ds$$

今設 $u(s)$ 有連續的導數，又因

$$\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}=-\frac{d}{ds}\lg\left(\sin^2\frac{t-s}{2}\right),$$

將(153)在區間 $(-\pi,\ t-\varepsilon)$ 和 $(t+\varepsilon,\ \pi)$ 上施行分部積分，並用

$$\lim_{\varepsilon\to+0}[u(t+\varepsilon)-u(t-\varepsilon)]\lg\left(\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}u'(\xi)\,2\varepsilon\lg\left(\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right)=0\quad(t-\varepsilon<\xi<t+\varepsilon)$$

的事實，可知
$$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u'(s)\lg\left(\sin^2\frac{t-s}{2}\right)ds,$$

這時等式右邊是個廣義積分。

若 $u(\tau)$ 滿足黎浦希茲條件，則由(143)式所定義的復變數 $z=re^{i\varphi}$ 的函數在閉圓 $|z|=1$ 中爲連續。假設

(154_1) $$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos ks+b_k\sin ks)$$

是 $u(s)$ 的福里哀級數，則 $v(s)$ 的福里哀級數爲[48]：

(154_2) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-b_k\cos ks+a_k\sin ks)$$

由封閉性方程[II, 147]：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u^2(s)ds=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2),\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}v^2(s)\,ds=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k^2+a_k^2),$$

因此
$$\int_{-\pi}^{+\pi} v^2(s)\,ds \leqslant \int_{-\pi}^{+\pi} u^2(s)\,ds\,,$$
這裏等號當且僅當 $a_0=0$ 時成立。所以變換(145)常使函數的平方在區間$(-\pi,+\pi)$上的積分數值減少。注意:這時 $u(s)$ 假設是實函數。這樣,我們看到變換(145)就相抵於將福里哀級數(154_1)變爲福里哀級數(154_2)。

50. 邊值問題 狄義赫利問題是調和函數的邊值問題中最簡單的。現在我們先說一般的邊值問題,狄義赫利問題祇不過是他的特別情形而已。

設區域 B 爲單連的,其境界線爲 l,現在要找一個 B 內的調和函數 u,使在 l 上滿足下面的條件:

$$au+b\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}=d\,, \tag{155}$$

其中 a, b, c, d 是已給的 l 上的實函數,其變數爲 l 的弧長 s。我們可以把 u 看做某一正則函數
$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$
的實數部分。由此易知
$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y},$$
從而
$$b\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}=R[(b+ic)f'(z)],$$
R 表示實數部分。

條件(155)現在可以改寫爲:
$$R[af(z)+(b+ic)f'(z)]=d, \tag{156}$$
因此問題變爲:找尋一個在 B 內爲正則的函數,他在境界 l 上滿足條件(156)

設已知一函數 $z=\omega(\tau)$ 將區域 B 保角變換爲單位圓 $|\tau|<1$。我們可以把要尋的函數當做 τ 的函數$F(\tau)$,他應該在單位圓內爲正則。
$$F(\tau)=f[\omega(\tau)];\quad f'(z)=F'(\tau)\frac{1}{\omega'(\tau)}。$$

這時(156)式可以改寫成:
$$R\left[aF(\tau)+\frac{b+ic}{\omega'(\tau)}F'(\tau)\right]=d, \qquad (|\tau|=1)$$
因爲經過變換 $z=\omega(\tau)$, a, b, c, d 可以看做是單位圓周 $|\tau|=1$ 上所定義的實函數。所以問題就歸結到圓的情形。

我們來研究一個特別情形,卽當境界條件(155)中不含函數 u 的情形 這時問題變成下面的樣子:找尋一個單位圓內的調和函數 $u(x,y)$,使在圓周上滿足條件,
$$b\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}=d。$$

函數 u 可以看做某一正則函數 $f(z)$ 的實數部分，於是 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 就是正則函數 $f'(z)$ 的實數部分和虛數部分，而上面的問題就和下面通常稱為希爾伯脫的問題相抵：

找一個單位圓內部的正則函數，使其實數部分和虛數部分在圓周上滿足邊值條件：

$$l(\varphi)u(\varphi)+m(\varphi)v(\varphi)=d(\varphi) \qquad (0<\varphi<2\pi) \tag{157}$$

其中 $l(\varphi)$，$m(\varphi)$ 和 $d(\varphi)$ 是單位圓周上中心角 φ 的已給函數。我們假設這些係數都是 φ 的連續函數，並且 $l(\varphi)$ 和 $m(\varphi)$ 不同時等於零。這時可以用 $\sqrt{l^2(\varphi)+m^2(\varphi)}$ 除(157)式的兩邊，而仍記所得的係數爲 $l(\varphi)$，$m(\varphi)$ 和 $d(\varphi)$，則

$$l^2(\varphi)+m^2(\varphi)=1\,。 \tag{158}$$

因此可設：

$$l(\varphi)=\cos\omega(\varphi)；\quad m(\varphi)=-\sin\omega(\varphi) \tag{159}$$

其中 $\omega(\varphi)$ 是 φ 的函數，即

$$\omega(\varphi)=-\operatorname{arctg}\frac{m(\varphi)}{l(\varphi)}。 \tag{160}$$

先研究一個特別情形，即當(159)所決定的 $\omega(\varphi)$ 爲單值函數時。例如若 $l(\varphi)$ 或 $m(\varphi)$ 在區間 $(-\pi,\ +\pi)$ 中不等於零，則 $\omega(\varphi)$ 爲單值。藉 $\omega(\varphi)$ 可將邊值條件(157)寫爲：

$$R[e^{i\omega(\varphi)}f(z)]=d(\varphi) \qquad (z=e^{i\varphi})。 \tag{161}$$

依照實數部分爲 $\omega(\varphi)$ 作一個函數 $\pi(z)$，由舒伐爾茲公式：

$$\pi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(\varphi)\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi\,。 \tag{162}$$

以 $\omega_1(\varphi)$ 記 $\pi(z)$ 的虛數部分的邊值，函數

$$e^{i\pi(z)}f(z)$$

在單位圓周 $z=e^{i\varphi}$ 上的實數部分等於

$$e^{-\omega_1(\varphi)}R[e^{i\omega(\varphi)}f(z)]_{z=e^{i\varphi}},$$

因此邊值條件(161)和下面的邊值條件相抵：

$$R[e^{i\pi(z)}f(z)]=d(\varphi)e^{-\omega_1(\varphi)}\,。$$

已知這函數的實數部分的邊值，又可用舒伐爾茲公式決定在圓內的函數值：

$$e^{i\pi(z)}f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d(\varphi)e^{-\omega_1(\varphi)}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}d\varphi+Ci,$$

其中 $\omega_1(\varphi)$ 是函數(162)的虛數部分的邊值：

$$\omega_1(\varphi)=\lim_{r\to1}I\left[\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(\psi)\,\frac{e^{i\psi}+re^{i\varphi}}{e^{i\psi}-re^{i\varphi}}\,d\psi\right], \tag{163}$$

I 表示虛數部分。

最後對 $f(z)$ 有下面的式子：

$$f(z)=e^{-i\pi(z)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d(\varphi)e^{-\omega_1(\varphi)}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi+Ci\right]。 \tag{164}$$

再看一個特別情形，即當沿單位圓周走一遍時函數 $\omega(\varphi)$ 得到改變量 $(-2n\pi)$，這裏 n 是個正整數：

$$(165)\qquad \omega(\pi)-\omega(-\pi)=-2n\pi。$$

做一個在單位圓周上爲單值的函數：

$$\chi(\varphi)=\omega(\varphi)+n\varphi,$$

由這函數又可做一個複變數函數 $\sigma(z)$，其實數部分的邊值即 $\chi(\varphi)$。函數

$$\sigma_1(z)=\sigma(z)+in\lg z$$

的實數部分的邊值是 $\omega(\varphi)$，而虛數部分的邊值顯然就是 $\sigma(z)$ 的虛數部分的邊值。我們仍以 $\omega_1(\varphi)$ 記之。和前面一樣可證函數

$$e^{i\sigma_1(z)}f(z)=z^{-n}e^{i\sigma(z)}f(z)$$

的實數部分的邊值等於

$$(166)\qquad R[z^{-n}e^{i\sigma(z)}f(z)]=d(\varphi)e^{-\omega_1(\varphi)}。$$

因這函數中有 z^{-n} 的因子，故可能以原點爲不高於 n 階的極點。藉舒伐爾茲公式我們現在先做一個單位圓內的正則函數，他的實數部分的邊值即 $d(\varphi)e^{-\omega_1(\varphi)}$：

$$(167)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d(\varphi)e^{-\omega_1(\varphi)}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}d\varphi+iC。$$

對這函數我們現在應該加上另一函數，他的實數部分在單位圓周上等於零，但在原點則可能有 n 階極點。易知這種函數的形式如下：

$$\sum_{k=1}^{n}\left[A_k\left(\frac{1}{z^k}-z^k\right)+iB_k\left(\frac{1}{z^k}+z^k\right)\right]$$

A_k 和 B_k 是任意的實常數。

把上式加到(167)式，即得問題的一般解：

$$(168)\qquad f(z)=z^n e^{-i\sigma(z)}\left\{Ci+\sum_{k=1}^{n}\left[A_k\left(\frac{1}{z^k}-z^k\right)+iB_k\left(\frac{1}{z^k}+z^k\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d(\varphi)e^{-\omega_1(\varphi)}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}d\varphi\right\}。$$

當 (165) 式中的 n 是負整數時，問題的解答和上面的不同。因爲這時以 (166) 式左邊爲實數部分的複變數函數不僅應在單位圓內部爲正則，並且應該以原點做不低於 n 階的零點。由(166)式右邊的函數藉舒伐爾茲公式做出一個正則函數以後，我們還須得出使這函數以原點做不低於 n 階的零點的條件。事實上，這時函數 $d(\varphi)$ 應滿足幾個條件，而後問題纔能有解答。

再看一個特別情形，即當調和函數在單位圓周上滿足邊值條件：

$$(169)\qquad \frac{\partial u}{\partial n}+l\frac{\partial u}{\partial s}+mu=d(\varphi),$$

其中 l 和 m 是常數，$d(\varphi)$是已知的函數，n 是圓周的外法線方向，s 是圓周的切線方向。這

情形和以前不同的地方在於不取坐標軸方向的導數而改取境界線的切線和法線方向的導數。如 [II, 108] 所證，這兩種導數中的任一種都可以用另一種表示出來。在理論物理中比較常用(169)式所示的邊值條件。沿 n 方向的微分顯然和沿動徑 r 方向的微分一樣，而沿 s 的微分則和當 $r=1$ 時沿中心角的微分一樣。一般設 $z=re^{i\varphi}$ 及 $u=R[f(z)]$，且可設 $I[f(0)]=0$，易知有：

$$\frac{\partial u}{\partial n}=R[z'f'(z')]; \qquad \frac{\partial u}{\partial s}=R[z'if'(z')] \qquad (z'=e^{i\varphi}),$$

而邊值條件(169)就可以改寫為：

$$R[(1+il)z'f'(z')+mf(z')]=d(\varphi). \qquad (z'=e^{i\varphi}).$$

以

$$\frac{1}{2\pi}\frac{z'+z}{z'-z}d\varphi$$

乘等式的兩邊，再關於 φ 積分。這樣就得到一個和上式相抵的新的邊值條件 [48]。由舒伐爾茲公式易知這條件是：

$$(170) \qquad (1+il)zf'(z)+mf(z)=F(z),$$

其中

$$(171) \qquad F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d(\varphi)\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}d\varphi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z'|=1}d(\varphi)\frac{z'+z}{z'(z'-z)}dz'.$$

方程(170)是一階線性微分方程，用通常的公式求其解[II, 4]可得：

$$(172) \qquad f(z)=z^{-k}\left[C+\frac{k}{m}\int_{z_0}^{z}z^{k-1}F(z)dz\right],$$

其中

$$k=\frac{m}{1+il}.$$

積分常數 C 應如此決定，使得 $f(z)$ 在 $z=0$ 為正則。若

$$d(\varphi)=A_0+\sum_{s=1}^{n}(A_s\cos s\varphi+B_s\sin s\varphi),$$

則

$$F(z)=A_0+\sum_{s=1}^{n}(A_s-iB_s)z^s.$$

代入(172)式然後積分，即得 $f(z)$ 的展開式：

$$f(z)=\frac{A_0}{m}+\sum_{s=1}^{n}\frac{A_s-iB_s}{m+s(1+il)}z^s.$$

51. 重調和函數　現在再看解析複函數論和所謂重調和函數的理論之間的關係。所謂重調和函數就是滿足方程

$$(173) \qquad \Delta\Delta u(x, y)=0$$

的函數，這裏 Δ 是通常的拉普拉斯運算子，以關於變數 x 和 y 的二次導數的和來表示(我們看平面的情形)。方程(173)可展開為：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

或

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0。\tag{174}$$

設 u 爲有界單連區域 B 中的連續函數,有連續的導數,且在這區域中滿足條件 (174)。由(173),函數

$$\Delta u=p(x, y)\tag{175}$$

是調和函數。設 $q(x, y)$是 $p(x, y)$的共軛函數,則

$$p(x, y)+iq(x, y)=f(z)\tag{176}$$

是複變數 $z=x+iy$ 的解析函數。

再做一解析函數

$$\varphi(z)=\frac{1}{4}\int f(z)dz=r(x, y)+is(x, y)\tag{177}$$

則顯有

$$\Delta r=\Delta s=0;\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{1}{4}R[f(z)]=\frac{1}{4}p。\tag{178}$$

應用這些式子可以算出:

$$\Delta[u-(rx+sy)]=p-2\frac{\partial r}{\partial x}-2\frac{\partial s}{\partial y}=0,$$

即 $u-(rx+sy)$是調和函數,以 p_1 記之。引進 p_1 的共軛函數 q_1 和對應於他們的複變數函數 $\psi(z)=p_1+iq_1$, 可寫:

$$u-(rx+sy)=p_1;\quad u=(rx+sy)+p_1=R[(x-iy)(r+is)]+p_1$$

或

$$u=R[\bar{z}\varphi(z)+\psi(z)]。\tag{179}$$

因此任一重調和函數可以藉(179)式用兩個複變數函數來表示。易證其逆:由任二解析函數 $\varphi(z)$和 $\psi(z)$藉公式(179)所決定的 $u(x, y)$是重調和函數,即公式(179)表示一般的重調和函數,當其中的 φ 和 ψ 是任意的解析函數時。這公式通常稱爲古爾公式。

當重調和函數 u 已給時(179)式中的 $\varphi(z)$和 $\psi(z)$並不能完全決定,而是可以包含幾個任意常數。首先,決定實函數 $q(x, y)$時可能有一常數項之差,卽當決定函數 $f(z)$ 時可能有一虛常數項之差。其次,由 (177) 式決定函數 $\varphi(z)$時也有一個任意複常數項。因此 $\varphi(z)$中所含的任意部分爲:

$$C+iaz,$$

其中 C 是任意複常數,a 是任意實常數。我們可以加幾個補充條件來決定這些任意常數。例如要求:

$$\varphi(0)=0;\quad I[\varphi'(0)]=0 \qquad (I\text{ 表示虛數部分})。\tag{180}$$

同樣,決定函數 $\psi(z)$ 時也得到任意部分爲一虛常數,如果使 $\psi(z)$ 滿足一個補充條件,

例如

$$I[\psi(0)]=0 \tag{181}$$

則這任意虛常數亦可決定。

方程(180)和(181)已可完全決定函數 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$，但這時當然假定 $z=0$ 在區域 E 之中。

現在試看關於重調和函數的一個最基礎的邊值問題。這問題的內容如下：

找一個閉曲線 l 內部的重調和函數，假如在 l 上這函數的值和法線方向導數的值已知爲：

$$u=\omega_1(s);\quad \frac{\partial u}{\partial n}=\omega_2(s) \qquad (在\ l\ 上)。\tag{182}$$

易認由邊値條件(182)可以得出函數 u 關於 x 和 y 的導數的邊值。事實上，因爲

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}\cos(s,\ x)+\frac{\partial u}{\partial n}\cos(n,\ x);\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial s}\cos(s,\ y)+\frac{\partial u}{\partial n}\cos(n,\ y)$$

其中 s 是 l 的切線方向。將(182)式代入上式，卽得：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\omega_1'\cos(s,\ x)+\omega_2\cos(n,\ x)=\omega_3(s)\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\omega_1'\cos(s,\ y)+\omega_2\cos(n,\ y)=\omega_4(s)\end{cases}\tag{183}$$

但在這邊値條件中函數 $\omega_3(s)$ 和 $\omega_4(s)$ 不能是完全任意的，因由假設函數 u 在 l 內部爲單值，繞 l 一週後 u 的改變量應等於零，卽

$$\int_l \frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0。\tag{184}$$

將(183)式中的關係代入上式可得 $\omega_3(s)$ 和 $\omega_4(s)$ 應滿足的條件：

$$\int_l[\omega_3(s)\cos(s,\ x)+\omega_4(s)\cos(s,y)]ds=0。\tag{185}$$

除滿足這條件之外，$\omega_3(s)$ 和 $\omega_4(s)$ 不再受任何限制了。

現在要用古剎公式(179)來求重調和函數。以 z 和 $\bar z$ 爲媒介將(179)式關於 x 和 y 微分，得：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=R[\varphi(z)+\bar z\varphi'(z)+\psi'(z)]\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=R[-i\varphi(z)+i\bar z\varphi'(z)+i\psi'(z)]=I[\varphi(z)-\bar z\varphi'(z)-\varphi'(z)]。\end{cases}\tag{186}$$

由此可得函數 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 應該在 l 上滿足的兩個恆等式：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}=\overline{\varphi(z)}+\bar z\varphi'(z)+\psi'(z)=\omega_3(s)-i\omega_4(s)\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi'(z)}=\omega_3(s)+i\omega_4(s)。\end{cases}\tag{187}$$

這兩個等式中的第二個顯然可以從第一個做共軛值而導出。這樣,問題就變爲兩個解析函數的邊值問題了。

和調和函數的情形一樣,我們只看以曲線 l 的內部爲對象的邊值問題。

在平面彈性學問題中應變 X_x, Y_y 和 X_y 可藉下列公式用重調和函數(艾黎函數)來表示:

$$X_x=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\quad Y_y=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad X_y=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \tag{188}$$

再由古剎公式可以用兩個解析函數表示應變。下面祇述結果,不擬證明了。由(179)式可知:

$$\begin{cases} X_x+Y_y=4R[\varphi'(z)] \\ 2X_y+i(X_x-Y_y)=-2i[\psi''(z)+\bar{z}\varphi''(z)]。\end{cases} \tag{189}$$

藉這公式可證當境界上的應變已給時,平面彈性靜力學問題也可以歸結到複變數函數論的邊值問題。

關於複變數函數論和平面彈性靜力學問題間的關係在哥洛宋夫教授的著作"複變數函數論在平面彈性學問題上的一個應用"中可以找到。複變數函數論在彈性學方面有系統的應用可以在穆斯哈利舒維爾的書"理論彈性學的幾個基本問題"中找到。

52. 波動方程和解析函數 在第二卷中已經說過方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{190}$$

對於音波或電磁波的傳播具有極大的重要性,他通常被稱爲波動方程。現在我們要看的祇是平面的情形,即當所求的函數 u 和某一坐標(設爲 z 坐標)爲獨立時。這時波動方程爲:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\qquad \left(c^2=\frac{1}{a^2}\right) \tag{191}$$

其中 u 是 t, x 和 y 的函數。利用解析複函數我們可以得出一類在物理學中有重要應用的方程(191)的解來,同時利用解析函數又可以大大地簡化這一類解之間所有的運算。

先做一個以後有重要用處的輔助方程:

$$l(\tau)t+m(\tau)x+n(\tau)y+p(\tau)=0, \tag{192}$$

其中 $l(\tau)$, $m(\tau)$, $n(\tau)$ 和 $p(\tau)$ 是複變數 τ 的解析函數。方程(192)定

義 τ 爲變數 t, x 和 y 的函數。今設 $f(\tau)$ 爲 τ 的解析函數，則 $f(\tau)$ 當然是 t, x 和 y 的函數。要求這函數的導數，先以 δ' 記方程(192)左邊關於 τ 的偏導數，利用隱函數和複合函數的微分公式，易知下列 τ 關於 t, x 和 y 的偏導數：

(193) $$\frac{\partial\tau}{\partial t}=-\frac{l(\tau)}{\delta'};\ \frac{\partial\tau}{\partial x}=-\frac{m(\tau)}{\delta'};\ \frac{\partial\tau}{\partial y}=-\frac{n(\tau)}{\delta'}。$$

要計算二階導數時先注意：

(194) $$\delta'=l'(\tau)t+m'(\tau)x+n'(\tau)y+p'(\tau)$$

是和 t, x, y 等直接關聯，而同時也藉 τ 和他們間接關聯的，因此

(195) $$\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{l(\tau)}{\delta'}\right]\frac{l(\tau)}{\delta'}+\frac{l(\tau)l'(\tau)}{\delta'^2}=\frac{2l(\tau)l'(\tau)}{\delta'^2}-\frac{l^2(\tau)}{\delta'^3}\delta''$$

或可寫爲：

(196) $$\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{l^2(\tau)}{\delta'}\right]$$

同樣可得：

(197) $$\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{m^2(\tau)}{\delta'}\right];\quad \frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{n^2(\tau)}{\delta'}\right];$$

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{m(\tau)n(\tau)}{\delta'}\right]。$$

解析函數 $f(\tau)$ 藉 τ 和 t, x, y 等間接關聯，它對後三者偏導數可由複合函數的微分公式求得。用以上諸結果可得：

(198) $$\frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial t^2}=f''(\tau)\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)^2+f'(\tau)\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}=$$

$$=f''(\tau)\frac{l^2(\tau)}{\delta'^2}+f'(\tau)\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{l^2(\tau)}{\delta'}\right],$$

或可寫爲：

(199) $$\frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial t^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[f'(\tau)\frac{l^2(\tau)}{\delta'}\right],$$

完全相仿

$$(200)\qquad \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial x^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[f'(\tau)\frac{m^2(\tau)}{\delta'}\right];\quad \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial y^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[f'(\tau)\frac{n^2(\tau)}{\delta'}\right];$$

$$\frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[f'(\tau)\frac{m(\tau)n(\tau)}{\delta'}\right]。$$

置$u=f(\tau)$，代入(191)式可得下面的方程：

$$\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[f'(\tau)\frac{m^2(\tau)+n^2(\tau)-a^2l^2(\tau)}{\delta'}\right]=0,$$

由此知道如果(192)式的係數滿足關係

$$(201)\qquad m^2(\tau)+n^2(\tau)=a^2l^2(\tau),$$

則$f(\tau)$是方程(191)的解。

要想得到(191)的實解，祇須把$f(\tau)$分開爲實數和虛數部分，則顯然兩部分都必滿足(191)式。

今設(S)爲三維空間，以(t,x,y)爲坐標。若在空間某一區域B內方程(192)所決定的τ爲實數，則在以上的論斷中不必假設$f(\tau)$是解析函數，因爲變數τ祇取實値之故。這時祇須假設$f(\tau)$是任意有連續的一階和二階導數的實函數卽可。

以上的論斷給我們下節的定理，他規定了我們上面所說的方程(191)的這一類解。

53. 基本定理 若在空間(S)中某一區域B之內方程(192)在條件(201)之下定義τ爲變數t，x和y的複函數，則任一解析函數$f(\tau)$的實數和虛數部分都是方程(191)的解。若τ在某一區域中是個(t,x,y)的實函數，則任意一個具有連續的一階和二階導數的τ的實函數必定是方程(191)的解。

若$l(\tau)\neq 0$，可用$l(\tau)$除(192)式的兩邊，所以不妨設$l(\tau)=1$。此外，可以將$m(\tau)$看做另一複變數$(-\theta)$。這時由條件(201)有$n^2(\tau)=$

$=a^2-\theta^2$，而方程(192)便可改寫為：

(202) $$t-\theta x+\sqrt{a^2-\theta^2}\,y+p(\theta)=0,$$

$p(\theta)$ 是 θ 的任意解析函數。顯然這時應寫 $f(\theta)$ 以替代 $f(\tau)$。

現在來研究 $p(\theta)=0$ 的特別情形。方程(202)成為：

(203) $$t-\theta x+\sqrt{a^2-\theta^2}\,y=0 \quad 或 \quad 1-\theta\frac{x}{t}+\sqrt{a^2-\theta^2}\frac{y}{t}=0,$$

他定義 θ 為兩個變數

(204) $$\xi=\frac{x}{t};\qquad \eta=\frac{y}{t}$$

的函數。因此方程(191)的解 $f(\theta)$ 也是這兩變數的函數，即 $f(\theta)$ 是 t, x 和 y 的零次齊次函數。如[I, 154]所知，這種函數以恆等式

$$u(kt,\ kx,\ ky)=u(t,\ x,\ y)$$

為特徵。可證其逆：方程(191)的任一個這種解必可由上面的方法得到。以後我們簡稱這種解為齊次解。

再來仔細研究一下方程(203)。如[19]所證，其中的根式 $\sqrt{a^2-\theta^2}$ 在具有沿實軸的割線 $(-a, +a)$ 的 θ 平面上為單值函數。我們如此固定他的值，使在虛軸的上半部取正值，就是當 $\theta=ib$，$b>0$ 時，根式取正值。由於其幅角是連續地變動着的，可知這條件和規定當 $\theta>a$ 時根式為負虛數，當 $\theta<-a$ 時根式為正虛數相抵。方程(203)可改寫為：

(205) $$1-\theta\xi+\sqrt{a^2-\theta^2}\,\eta=0\text{。}$$

去根號再依 θ 解所得的二次方程，得：

(206) $$\theta=\frac{\xi-i\eta\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2}=\frac{xt-iy\sqrt{t^2-a^2(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}\text{。}$$

先假設 ξ 和 η 滿足不等式：

(207) $$\xi^2+\eta^2<\frac{1}{a^2}$$

或

$$x^2+y^2<\frac{1}{a^2}t^2。\tag{208}$$

利用方程(205)中根式應有定值的性質易證(206)式中的根式常取正值。實際上，若在方程(205)中設$\xi=0$，則θ應取純虛數值，且$\sqrt{a^2-\theta^2}$的符號應和η的符號相反，就是如果$\eta<0$，則$\sqrt{a^2-\theta^2}>0$。由前面的條件，θ應位於虛軸的上半部，因此在(206)中的根式應取正值。同樣當$\eta>0$時$\sqrt{a^2-\theta^2}<0$，θ應位於虛軸的下半部，故(206)中的根式也取正值。

當ξ和η取定值時由(204)我們得到空間(S)中經過原點的一條直線。現在祇看相當於$t>0$的半直線，稱之爲放射線。由條件(207)或(208)這些放射線的全體成一錐形束，以原點爲頂點，頂角等於$\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$，其軸合於$t$軸。利用(206)式不難證明和這些放射線對應的$\theta$全體是整個$\theta$平面除了割線$(-a,+a)$。注意由(206)式立刻可以導出的幾件事實。首先，錐形束的表面上的放射線，即滿足等式

$$\xi^2+\eta^2=\frac{1}{a^2}\quad 或\quad x^2+y^2=\frac{1}{a^2}t^2$$

的放射線對應於θ平面中割線$(-a,+a)$上的點。錐形束的軸由$x=y=0$或$\xi=\eta=0$所決定，故對應於θ平面上的無限遠點。又在平面$y=0$上的放射線全體使$\eta=0$，故對應於θ平面中實軸上絕對值大於a的點，即實軸上割線$(-a,+a)$以外的點。若以$y=0$平面分這錐形束爲兩半，則一半對應於上半θ平面，另一半對應於下半θ平面，即$y>0$的放射線全體和下半θ平面對應，$y<0$的放射線全體和上半θ平面對應。

若照以前講過的方法來取(191)的解，即可以當做某一解析函數

$f(\theta)$的實數部分的解，那末他在上述每一條放射線上當然取常數值。

再研究空間(S)中錐形束以外的點所對應的θ。這種點滿足不等式：

$$\xi^2+\eta^2>\frac{1}{a^2}\quad 或\quad x^2+y^2>\frac{1}{a^2}t^2。$$

這時方程(205)有兩個實根，都在線段$(-a,+a)$之上：

$$(209)\qquad \theta=\frac{\xi\pm\eta\sqrt{a^2(\xi^2+\eta^2)-1}}{\xi^2+\eta^2}=\frac{xt\pm yt\sqrt{a^2(x^2+y^2)-t^2}}{x^2+y^2}。$$

線段$(-a,+a)$是平面的割線，在割線的兩岸根式$\sqrt{a^2-\theta^2}$有不同的符號，因此在方程(205)中根式應有兩種符號，同樣在(209)中根式也應取兩種符號。設$M_0(t_0, x_0, y_0)$爲錐形束以外的一點，θ_1和θ_2爲對應於這點的θ的值。若以$\theta=\theta_1$和θ_2代入(205)式的左邊，則得關於t，x和y的兩個實的一次方程，這表示通過M_0點的兩張平面。我們也可以換一種說法，即：任一位於割線$(-a,+a)$上的θ的值θ_0必對應於空間(S)中的一張平面P。設λ爲錐形束中對應於$\theta=\theta_0$的放射線。平面P顯然應包含λ在其內。易證平面P必定是錐面的切平面，並且彼此沿λ相切。實際上，如果P不和錐面沿λ相切，則必和他相交，而P中就有一部分是在錐面的內部。但是這樣就會有錐形束中的點和區間$(-a,+a)$中的點$\theta=\theta_0$對應，這是不可能的。因此割線$(-a,+a)$上每一點θ藉(205)式對應於一張和錐面相切的平面，他們相切的直線即錐面上和θ對應的放射線。

我們也可以用平面圖形來表示上述的錐形束以及和錐面相切的平面，祇須拿一張和t軸垂直的平面去截這錐形束就成了。這時可用截面上的圓代表錐形束，這圓周上的切線代表錐形束的切平面。特別，我們可以藉變數ξ和η來敍述這既得的平面圖形。和錐形束對應的是(ξ,η)平面上的圓K：

$$\xi^2+\eta^2\leqslant\frac{1}{a^2},\tag{210}$$

這時圓內每一點對應於束中一定放射線，反之亦然。圓周的切線對應於錐面的切平面。半平面 $\eta>0$ 對應於半空間 $y>0$。軸 $\eta=0$ 對應於平面 $y=0$。

設 $f(\theta)$ 是具有割線 $(-a,+a)$ 的 θ 平面上的單值解析函數。對應的方程(191)的解是：

$$u=R[f(\theta)]\qquad (R\text{ 表實數部分})。\tag{211}$$

這解在錐形束內有定義，或對平面 (ξ,η) 的情形，在圓(210)中有定義。我們要說一個在應用上很重要的把這解解析延拓到錐形束外部的方法。為此可作一族的半平面和這錐面相切，他們都沿一方向繞着錐面前進，就是說，對應的圓周

$$\xi^2+\eta^2=\frac{1}{a^2}\tag{212}$$

的切線是如圖 51 所示的一般。這些半切平面互不相交，並且充滿空間 (S) 中錐形束以外的部分。在每一張半切平面上 $f(\theta)$ 取常數值，因此我們可以利用(211)式在錐形束外部單值地確定(191)的解 u，他是已給錐形束內的解的解析延拓。這錐形束外部的解不但在放射線上取常數值，並且在半平面上取常數值。注意：我們顯然有兩種方法定義圓周(212)的切線的方向，因此也就有兩種不同的解析延拓方法可以得到。

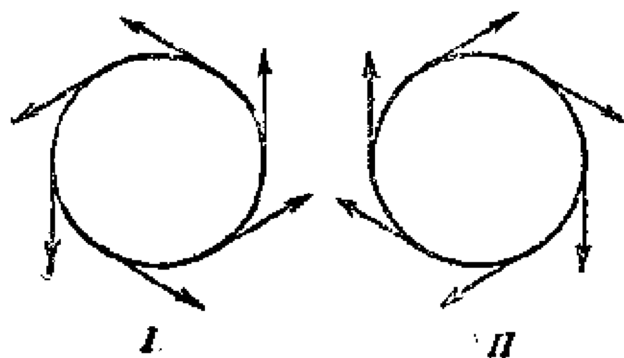


圖 51

對應於錐面上的放射線的 θ 是在割線 $(-a,+a)$ 上。這時可將由

(211)式所確定的 u 分開爲兩個實數項 $u=u_1(\theta)+u_2(\theta)$，而把 $u_1(\theta)$沿半切線 I 延拓出去，把 $u_2(\theta)$沿半切線 II 延拓出去(圖 51)。這樣也得到方程在圓外的一個解。由此可知實際上存在無數多種解析延拓的方法，任一延拓都能在越過圓周時保持 u 的連續性。在具體的問題中這種解析延拓會在研究波的運動時遇到。

以上所說的都是在求全空間(S)中有定義的(191)的解。現在假設我們所感興趣的祇是半空間 $y\geqslant 0$，或在平面(ξ, η)上祇是半平面 $\eta\geqslant 0$。假設公式(211)在半圓內確定方程(191)的一個解，並且在半圓周的 AB 弧上這解等於零，如圖 52 所示。在許多和振動傳播有關的問題中我們常利用如圖 52 中所畫的半切線，卽和錐面的半切平面對應的，將(211)在半圓內所定義的解單值地解析延拓到半平面中去。這解在曲線 $A_1ABB_1A_1$ 以外的部分應該等於零。

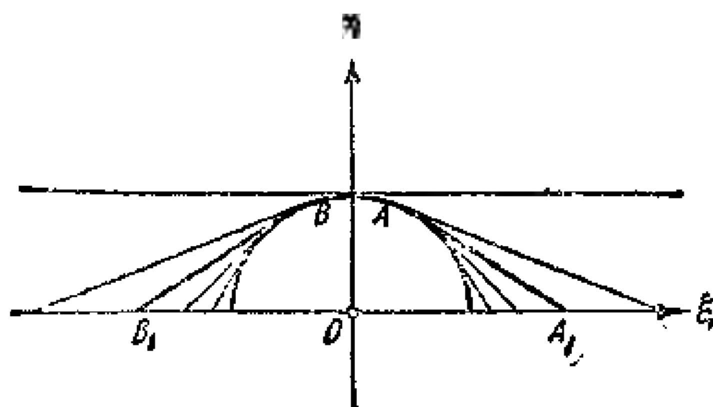


圖　52

和以上類似的辦法也適用於方程(202)的一般情形。但這時我們所遇到的顯然是比錐形來更複雜的和 $p(\theta)$ 有關的幾何圖形了(有兩個參數的直線族)。

我們可以在方程(202)或(203)中以另一和 θ 有解析函數關聯的複變數 z 來替代 θ。例如看下面的特別情形。設 z 和 θ 藉公式

$$\theta=\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{213}$$

相關聯。這時，如[33]中所證，和具有割線$(-a,+a)$的θ平面對應的是z平面上的單位圓$|z|\leqslant 1$。利用公式(213)易證對我們前面所選定的根式的值成立下面的公式：

$$\sqrt{a^2-\theta^2}=i\frac{a}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)。 \tag{214}$$

在這情形之下我們再來仔細研究方程(203)。他的形式是：

$$t-\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)x+i\frac{a}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)y=0 \tag{215}$$

或
$$1-\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\xi+i\frac{a}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\eta=0,$$

這式子也可改寫爲：

$$1-\frac{a}{2}z(\xi-i\eta)-\frac{a}{2}\frac{1}{z}(\xi+i\eta)=0。 \tag{216}$$

設圓(210)的極坐標由下式決定：

$$\xi=\rho\cos\varphi;\quad \eta=\rho\sin\varphi,\qquad\qquad \left(0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{a}\right)。$$

於是方程(216)又可改寫爲：

$$a\rho e^{-i\varphi}z^2-2z+a\rho e^{i\varphi}=0,$$

顯見$z=re^{i\varphi}$是上式的解，其中r由二次方程

$$a\rho r^2-2r+a\rho=0,\qquad\qquad (0\leqslant r\leqslant 1)$$

來決定。因此圓(210)中每一點(即放射線)所對應的複變數$z=re^{i\varphi}$和這點有相同的幅角，而圓周(212)上的點則對應於有相同幅角的單位圓周$|z|=1$上的點。換句話說，圓(210)中任一半徑對應於單位圓$|z|\leqslant 1$中有相同中心角的半徑。

這一節中所說這些應用複變數函數論於波動方程(191)之解的基

本概念在和波動方程有關的音波或電磁波傳播問題中，以及在更複雜的彈性波的傳播問題中都有廣泛的應用。以上的方法祇給我們方程(191)的某一類的解，但在這一類解之中有具有重要的物理意義的，並且應用這一類解可以把關於波的反射和繞射的問題化成最便於計算的形式。

方程(191)是平面中的波動方程(柱面波)，但是利用疊合原理可以從前面得到的那一類的解做出另外的解來，並且從而研究三維空間中的一般波動方程。上述方法可於索伯列夫和著者的工作中找到，載於"科學院地震學彙報"中。他在具體問題上的應用則可於諾留舒金那和索伯列夫的工作中找到。因爲需要很多預備知識，又怕離題太遠，所以不擬詳細去說他。下面祇略述這方法在兩個問題上的應用，即平面波的繞射問題和彈性振動的反射問題。

54. 平面波的繞射 設在(x, y)平面上有一條沿着半直線$y=x, x>0$的割線。又設在這割線除外的平面中當$t<0$時有速度爲$\frac{1}{a}$而進行方向平行於X軸的平面波，使當$t=0$時波前恰好到達割線的頂點(即原點)。設這平面波具有如下的初等形式：

(217) $$u=1 \quad 當 \quad x<\frac{1}{a}t; \quad u=0 \quad 當 \quad x>\frac{1}{a}t,$$

即波前已經到達的地方u的值常等於1，而波前還沒有到達的地方$u=0$。

當$t<0$時函數u滿足(191)式，而且他顯然是這方程的齊次解，祇和ξ, η有關，並且由下面的條件來決定：

(218) $$u=1 \quad 當 \quad \xi<\frac{1}{a}; \quad u=0 \quad 當 \quad \xi>\frac{1}{a}。$$

波前的傳播速度爲$\frac{1}{a}$，這由波動方程(191)知道應該取此值。

現在我們來研究平面波(217)關於上述割線的繞射，但假設經過繞射以後，即當$t>0$時，波動仍可用方程(191)的齊次解表示，即可用一個解析函數$f(z)$的實數部分來表示，其中複變數z由方程(216)決定。這種假設是非常自然的，因爲引起繞射的是以原點爲頂點的割線。再假設在割線的兩岸成立下之條件：

(219) $$u=0 \quad (在割線上)。$$

在$t=0$時平面波到達O點，而後就發生了繞射的現象。現在考察當$t>0$時的某一瞬間

的情形。因爲當波動方程爲(191)的場合微擾的傳播速度等於 $\frac{1}{a}$，所以在這一瞬間微擾的狀況如下：首先，我們有直線形的波前 $ABCD$，他被波前業已經過的障礙物分成兩部分 AB 和 CD。$ABCD$ 垂直於 X 軸，而 $\overline{OB}=\frac{1}{a}t$。此外又有從境界線 OG 依照通常的規則反射所得的波，其波前爲平行於 X 軸的直線 EC(圖 53)。還有，端點 O 的存在又產生以該點爲中心，半徑等於 $\frac{1}{a}t$ 的外加的微擾。問題的中心是要決定在這圓內 u 是什麼樣的函數。首先看在這圓以外 u 的數值如何。在割線 OG 以下而位於 ABF 右邊的平面中顯然有 $u=0$。在這割線以上而位於 CD 右邊的平面中顯然也有 $u=0$。此外，在線路 $ECFE$ 所圍成的區域中除了原來的波以外還有反射波，由邊值條件(219)知在其中 $u=0$。在圓的外部而波動已經到達的區域中除了上述 $ECFE$ 的內部以外處處 $u=1$。以原點爲中心，半徑等於 $\frac{1}{a}t$ 的圓就是(210)式所表示的圓。祇是現在他沿半徑 $\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}=\frac{\pi}{4}$ 上有一割線。

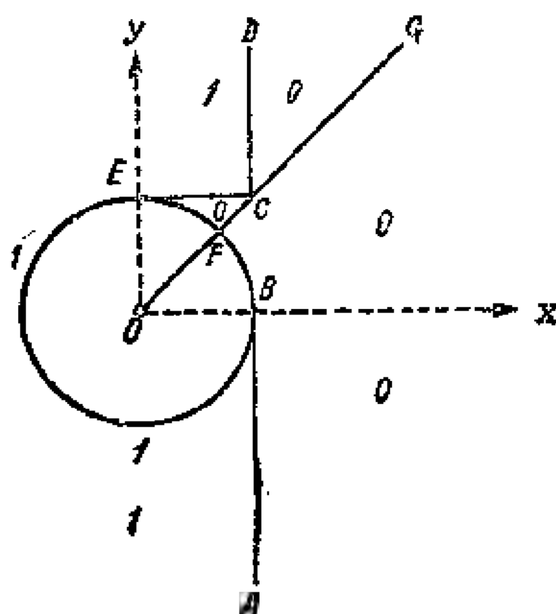


圖 53

藉方程(216)可得 z 平面上的單位圓 $|z|<1$，沿着半徑 $\arg z=\frac{\pi}{4}$ 被割。因爲如我們前面已知，圓(210)的半徑和單位圓 $|z|<1$ 中有同樣中心角的半徑相對應。

記住在上述各區域中 u 的數值和邊值條件，回過來就在 z 平面上得到下面的問題：找一個在具有割線的圓 $|z|<1$，$-\frac{7\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4}$ 之內爲正則的函數 $f(z)$，使得他的實數部分在割線的兩岸等於零，即在半徑

$$\arg z=\frac{\pi}{4} \quad 和 \quad \arg z=-\frac{7\pi}{4}$$

上等於零。又在圓周 $|z|=1$ 的圓弧

$$-\frac{7}{4}\pi<\arg z<-\frac{3\pi}{2} \quad 和 \quad 0<\arg z<\frac{\pi}{4}$$

上他也等於零，而在 $|z|=1$ 的其他部分等於 1。這問題的解答並不難求。先將 z 平面繞着原點轉一角度 $\frac{7}{4}\pi$：

$$w_1=e^{i\frac{7}{4}\pi}z,$$

我們得到一個圓 $|w_1|<1$，$0<\arg w_1<2\pi$，割線沿着半徑 $\arg w_1=0$。將 w_1 開平方，這割

綫變成實軸上的割綫$(-1,+1)$，而圓$|w|<1$變成單位圓的上半部。故知變換

$$w=\sqrt{w_1}=e^{i\frac{7}{8}\pi}z^{\frac{1}{2}}$$

將z平面上具割綫的圓變爲w平面中的上半單位圓。所求的函數$f(w)$現在應該滿足如下的邊值條件：$f(w)$的實數部分在實軸上的綫段$(-1,\ +1)$上等於零，又

$$R[f(e^{i\varphi})]=0\quad 當\quad 0<\varphi<\frac{\pi}{8}\quad 及\quad \frac{7}{8}\pi<\varphi<\pi$$

$$R[f(e^{i\varphi})]=1\quad 當\quad \frac{\pi}{8}<\varphi<\frac{7}{8}\pi。$$

所以$f(w)$把實軸上的綫段$(-1,\ +1)$變爲虛軸上的綫段，且由對稱原理，$f(w)$可被解析延拓到下半單位圓，使得在w平面中關於實軸爲對稱的兩點$f(w)$的值關於虛軸爲對稱[24]。

因此得到下面的等式：

$$R[f(e^{-i\varphi})]=-R[f(e^{i\varphi})]。$$

記住這一點，可知$f(w)$在單位圓周上應滿足以下的邊值條件：

$$R[f(e^{i\varphi})]=0\qquad -\frac{\pi}{8}<\varphi<+\frac{\pi}{8}\quad 及\quad \frac{7}{8}\pi<\varphi<\frac{9}{8}\pi$$

$$(220)\qquad R[f(e^{i\varphi})]=1\qquad \frac{\pi}{8}<\varphi<\frac{7}{8}\pi$$

$$R[f(e^{i\varphi})]=-1\qquad -\frac{7}{8}\pi<\varphi<-\frac{\pi}{8}。$$

要得到這邊值問題的解答我們研究函數

$$(221)\qquad \frac{1}{i}\lg\frac{\alpha-w}{\beta-w}=\frac{1}{i}\lg\left|\frac{\alpha-w}{\beta-w}\right|+\arg\frac{\alpha-w}{\beta-w}$$

其中α和β是單位圓周上直徑AB的兩個端點(圖 64)。設M表示變動點w。這函數的實

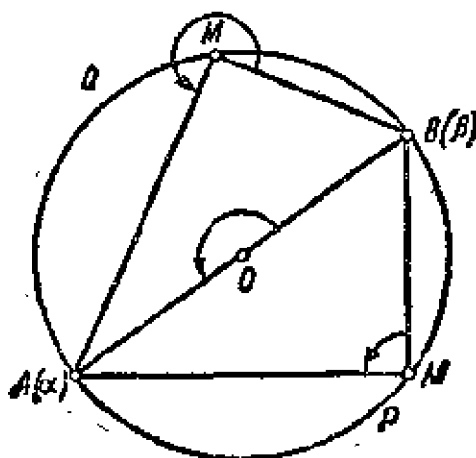


圖 64

數部分

$$\arg\frac{\alpha-w}{\beta-w}=\arg(\alpha-w)-\arg(\beta-w)$$

表示從向量 MB 逆時針地轉到向量 MA 的角度。函數 (221) 在圓 $|w|<1$ 中爲單值正則，當 $w=0$ 時函數值爲 π，但可能差一個 2π 的倍數。我們規定其值爲 π，這樣就固定了函數(221)在圓 $|w|<1$ 中的一個支頁。對於如此選取的支頁我們有：

$$\frac{1}{i}\lg\frac{\alpha-w}{\beta-w}=\pi+\frac{1}{i}\lg\frac{1-\alpha^{-1}w}{1-\beta^{-1}w}=\pi+\frac{1}{i}\lg(1-\alpha^{-1}w)-\frac{1}{i}\lg(1-\beta^{-1}w),$$

其中兩個對數都取由通常的冪級數所決定的主值。若 w 落在 APB 弧上，則 BMA 角等於 $\frac{\pi}{2}$，若 w 落在 AQB 弧上，則 BMA 角等於 $\frac{3\pi}{2}$，就是說，如我們以上所選取的函數 (221) 在圓 $|w|<1$ 內的單值支頁，他的實數部分在 APB 弧上等於 $\frac{\pi}{2}$，在 AQB 弧上等於 $\frac{3}{2}\pi$。

應用這結果於函數

$$\psi(w)=\frac{1}{i}\lg\frac{e^{i\frac{7}{8}\pi}-w}{e^{-i\frac{\pi}{8}}-w}+\frac{1}{i}\lg\frac{e^{-i\frac{7}{8}\pi}-w}{e^{i\frac{\pi}{8}}-w}.$$

設以 M_1，M_2，M_3 和 M_4 表示下列四點：

$$e^{-i\frac{\pi}{8}},\quad e^{i\frac{\pi}{8}},\quad e^{-i\frac{7}{8}\pi},\quad e^{i\frac{7}{8}\pi},$$

則易知 $\psi(w)$ 的實數部分在弧 M_1M_2 和 M_3M_4 上等於 2π，在弧 M_1M_3 上等於 π，在弧 M_2M_4 上等於 3π。藉此立刻可得邊值問題(220)的解爲：

$$f(w)=\frac{1}{\pi}\psi(w)-2.$$

回到變數 z，可知在圓

$$x^2+y^2<\frac{1}{a^2}t^2$$

內部的繞射問題的解爲：

$$U=R\left[\frac{1}{\pi i}\lg\frac{\left(e^{i\frac{7}{8}\pi}-e^{i\frac{7}{8}\pi}z^{\frac{1}{2}}\right)\left(e^{-i\frac{7}{8}\pi}-e^{i\frac{7}{8}\pi}z^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{-i\frac{\pi}{8}}-e^{i\frac{7}{8}\pi}z^{\frac{1}{2}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{i\frac{7}{8}\pi}z^{\frac{1}{2}}\right)}\right]-2.$$

以上的論斷似乎不夠嚴格，又所謂初等平面波 u 的概念，即在波前已經到達的地方 $u=1$，波前尚未到達的地方 $u=0$，初看起來好像有點特別。但是我們可以證明任何平面波都可表示爲包含初等平面波的積分。藉此，一般平面波的繞射問題就可歸結到我們上面已經研究過的問題了。

現在來看平行於 X 軸前進的一般平面波。這種波由函數 $f\left(\frac{1}{a}t-x\right)$ 決定，但設當 $\tau<0$ 時 $f(\tau)=0$。函數 $f\left(\frac{1}{a}t-x\right)$ 顯然滿足方程(191)。我們前面所看過的初等平面波對應

於特別情形：$f(\tau)=1$ 當 $\tau>0$，$f(\tau)=0$ 當 $\tau<0$。那時我們以 $u(\tau)$ 代 $f(\tau)$，如(217)式所示：

$$u(\tau)=\begin{matrix}0 & 當 & \tau<0\\ 1 & 當 & \tau>0。\end{matrix} \tag{213$_1$}$$

今設 $f(\tau)$ 爲連續，有連續的導數，且當 $\tau\leqslant0$ 時等於零。那末可寫：

$$f(\tau)=\int_0^\infty u(\tau-\lambda)f'(\lambda)d\lambda$$

實際上，由 $u(\tau)$ 的定義及 $f(0)=0$ 的條件，有：

$$\int_0^\infty u(\tau-\lambda)f'(\lambda)d\lambda=\int_0^\tau f'(\lambda)d\lambda=f(\tau)-f(0)=f(\tau)$$

從而

$$f\left(\frac{1}{a}t-x\right)=\int_0^\infty u\left(\frac{1}{a}t-x-\lambda\right)f'(\lambda)d\lambda=\int_0^\infty u\left(\frac{t-a\lambda}{a}-x\right)f'(\lambda)d\lambda。$$

由這式子易見所給的一般型平面波是些初等波

$$u\left(\frac{t-a\lambda}{a}-x\right)f'(\lambda)d\lambda$$

的和(嚴格地說，是積分)。

若以 $U(x,y,t)$ 表示前面所得初等波的繞射的解，則對波函數 $f\left(\frac{1}{a}t-x\right)$ 繞射問題的解就是：

$$V=\int_0^\infty U(x,y,t-a\lambda)f'(\lambda)d\lambda。$$

以上的研究限於關於原點的繞射，而 $U(x,y,t)$ 即表示這繞射的結果。當 $t>0$ 時他在以原點爲中心半徑等於 $\frac{1}{a}t$ 的圓中有效，即當 $t\leqslant0$ 時對於任意的 (x,y) 應有 $U(x,y,t)=0$，又當 $t>0$ 而 $x^2+y^2\geqslant\frac{1}{a^2}t^2$ 時也有 $U(x,y,t)=0$。這樣在 V 的積分表示式中關於 λ 的積分實際上只在有限區間中履行。

藉助於上述方法可以解決向任意方向進行的平面波關於任一角域的繞射問題。

55. 彈性波的反射　在平面彈性學問題中分位移 u 和 v 可用公式

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{222}$$

來表示，其中函數 φ 通常稱爲縱波勢，ψ 稱爲橫波勢。這些勢函數應該滿足如下形式的波動方程：

$$a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \tag{223}$$

$$b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \tag{224}$$

其中

(225) $$a=\sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}};\quad b=\sqrt{\frac{\rho}{\mu}},$$

這裏 ρ 是介質的密度，λ 和 μ 是拉梅彈性常數。如彈性學中所熟知，$\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{b}$ 分別表示縱波和橫波的傳播速度，而(222)式則表示一般型的微擾分解爲縱型和橫型微擾。

再引進兩個以勢函數表示彈性體中的張力的公式。我們祇看作用於和 Y 軸垂直的直線上的張力向量。這向量的兩個支量可用下式表示：

(226) $$\begin{cases}Y_x=\mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]\\ Y_y=\mu\left[\left(\frac{b^2}{a^2}-2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right]。\end{cases}$$

有了這些準備以後我們回到本題來。假設當 $t=0$ 時從 $x=0$, $y=y_0$ 這點傳出一個純縱型的微擾，其特徵勢函數滿足方程 (223)，且爲這方程的關於變數 t, x 和$(y-y_0)$的齊次解，就是說，他是某一解析函數的實數部分：

(227) $$\varphi=R[\Phi(\theta)]$$

其中複變數 θ 由方程

(228) $$t-\theta x+\sqrt{a^2-\theta^2}\,(y-y_0)=0$$

所決定。

上式和(203)式相差的祇在改 y 爲$(y-y_0)$。事實是這樣，勢函數 (227) 對應於一力，當 $t=0$ 時這力集中作用於 $x=0$, $y=y_0$ 這點。我們不預備再從力學的觀點更詳細地解釋(227)式所表示的事態了。

現在假設在(227)式中出現的函數 $\Phi(\theta)$在具有割線$(-a,+a)$的 θ 平面中爲正則，除了無限遠點以外；又在割線上 $\Phi(\theta)$的實數部分爲零。與這事實相對應，勢函數 φ 就在以 $t=0$, $x=0$, $y=y_0$ 爲頂點，頂角等於 $\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$ 的錐形束的表面等於零。這錐形束的表面對應於微擾傳播的波前。當然，我們假設勢函數在錐形束以外處處等於零。又設微擾傳播不在全平面，而祇在半平面 $y>0$，微擾的中心 $x=0$, $y=y_0>0$ 也在這半平面內。勢函數祇在 $t<ay_0$ 時可以完全決定運動狀況。當 $t=ay_0$ 時微擾到達直線 $y=0$，這直線是介質的境界線。從這時開始了波的反射，反射的規律應由這直線上的邊值條件而得。假設這境界線不受張力，則對應的邊值條件可於 $y=0$ 時置(226)中兩式爲零而得。

經過反射以後對勢函數 φ 又應加上另外兩個勢函數：一爲反射縱波勢 φ_1，另一爲反射橫波勢 ψ_1。假設這兩個勢函數都可表示爲解析複函數的實數部分：

(229) $$\varphi_1=R[\Phi_1(\theta_1)];\quad \psi_1=R[\Psi_1(\theta_2)]。$$

我們現在要由已給的勢函數 φ 和邊值條件來尋求決定複變數 θ_1 和 θ_2 的方程以及解析函數 $\Phi_1(\theta_1)$和 $\Psi_1(\theta_2)$。由[53]中的論斷及橫波勢 ψ 所滿足的波動方程中不含常數 a 而含常數 b 的事實可知 θ_1 和 θ_2 係由如下形式的方程來決定：

$$(230)\qquad \begin{cases} t-\theta_1 x \pm \sqrt{a^2-\theta_1^2}\, y + p_1(\theta_1) = 0 \\ t-\theta_2 x \pm \sqrt{b^2-\theta_2^2}\, y + p_2(\theta_2) = 0, \end{cases}$$

因此首先須決定函數 $p_1(\theta_1)$ 和 $p_2(\theta_2)$ 的形式以及根式的符號，但根式在具有割線的平面中的值常依照[53]中所指示的來決定。

回頭來看對應於方程 (228) 且以 $t=x=0$, $y=y_0$ 爲頂點的放射線的錐形束。把現在的問題和[53]來比較，可知 $y-y_0$ 就對應於[53]中的 y。平面 $y=y_0$ 把我們的錐形束分成兩部分，而 $y>y_0$ 的那一部分和境界面 $y=0$ 在以 (t, x, y) 爲坐標的空間 (S) 中完全不相遇。$y<y_0$ 的那一部分和這平面要相交，且束中的直線和這平面的交點充滿了一個平面區域，由不等式

$$(231)\qquad x^2+y_0^2<\frac{1}{a^2}t^2$$

所決定(圖 55)。實際上，現在錐形束的方程是

$$x^2+(y-y_0)^2<\frac{1}{a^2}t^2,$$

以 $y=0$ 代入立刻得到(231)式。

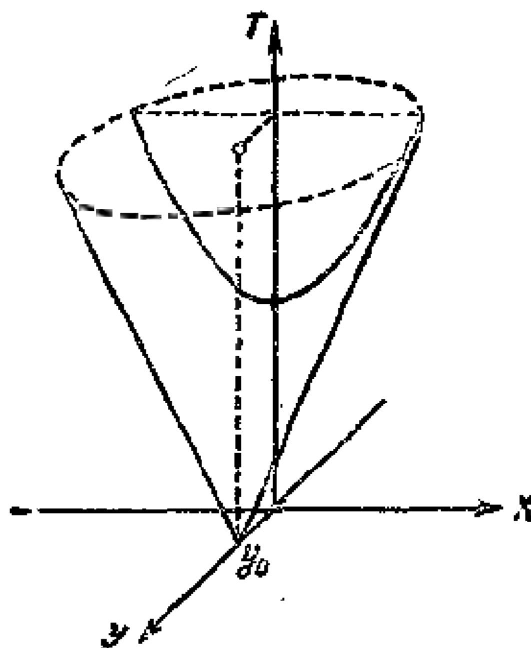


圖 55

區域 (231) 顯然是空間 (S) 中的平面 $y=0$ 上某一雙曲線的內域。如[53]中所已知，使 $y-y_0<0$ 的錐形束的那一半恰對應於複變數 θ 的上半平面。而且沿着其中每一反射線從原點出發時 y 顯然在減少，而同時 t 則在增大。現在取方程(230)中根式的符號和(228)中根

式的符號相反，並且如此決定函數 $p_1(\theta_1)$ 和 $p_2(\theta_2)$ 使當 $y=0$ 時(230)中的兩方程和方程(228)符合。這樣，對於新的複變數 θ_1 和 θ_2 我們得到下面兩個方程：

(232)
$$t-\theta_1 x-\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,(y+y_0)=0,$$

(233)
$$t-\theta_2 x-\sqrt{b^2-\theta_2^2}\,y-\sqrt{a^2-\theta_2^2}\,y_0=0\text{。}$$

在平面 $y=0$ 上的區域(231)中取一點 $M_1(t_1, x_1)$。經過這點有半錐形束中的一條放射線，他對應於 $\theta=\theta'$。若以點坐標 $t=t_1$, $x=x_1$, $y=0$ 代入方程(232)和(233)，所得 θ_1 和 θ_2 的值也是 θ'。現在如果以 $\theta_1=\theta'$ 和 $\theta_2=\theta'$ 代入(232)和(233)式，那末就得到兩條反射線，我們以後稱爲縱反射線和橫反射線［這些都是在空間(S)中］。注意一件重要的事實，即由方程(232)和(233)中根式的符號的選取可知沿着這兩條反射線當 t 增加時 y 也在增加，就是說，當時間增加時反射線向半平面（或半空間）$y>0$ 的內部進行，換句話說，反射波不改變在反射以前的擾擾的狀態。現在由方程(232)來查驗這件事。和方程(228)比較，易知(232)對應於以 $t=x=0$, $y=-y_0$ 爲頂點的錐形束，這頂點和擾擾的中心 $t=x=0$, $y=y_0$ 關於平面 $y=0$ 對稱。因爲方程(232)中根式的符號和方程(228)中根式的符號相反，可知現在上半平面中那些即將由反射的結果而得到的 θ 值所對應的放射線上有 $t>0$, $y+y_0>0$，且當 t 增加時 y 也增加。相類的事實也在方程(233)所定義的放射線上成立，但這時放射線束不再成錐形了。

這樣由區域(231)中每一點 M_1 有兩條反射線發出來。至於反射波的勢函數則應依照(229)式去尋求，即勢函數應在每一反射線上取常數值。剩下來要決定(229)式中兩函數的形式。前面已經說過，我們現在要研究如下形式的邊值條件：

$$2\frac{\partial^2(\varphi+\varphi_1)}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\bigg|_{y=0}=0,$$

$$\left(\frac{b^2}{a^2}-2\right)\left[\frac{\partial^2(\varphi+\varphi_1)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\varphi+\varphi_1)}{\partial y^2}\right]+2\frac{\partial^2(\varphi+\varphi_1)}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial y}\bigg|_{y=0}=0\text{。}$$

要計算由(227)和(229)式所定義的函數 φ, φ_1 和 ψ_1 的導數，我們可以利用(200)式，以方程(228)，(232)和(233)中對應的係數來代替該式中的係數 $l(\tau)$, $m(\tau)$ 和 $n(\tau)$。這時須注意，遇到反射橫波勢 ψ_1 時應該以 b 代 a。當 $y=0$ 時複變數 θ, θ_1, θ_2 有相同的數值，故可用同一字母 θ 來表示。這樣可得如下形式的邊值條件：

(234)
$$\begin{cases}R\left[\dfrac{1}{\delta'}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\dfrac{-2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,[\Phi'(\theta)-\Phi_1'(\theta)]+(b^2-2\theta^2)\Psi_1'(\theta)}{\delta'}\right]=0,\\[2ex] R\left[\dfrac{1}{\delta'}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\dfrac{(b^2-2\theta^2)[\Phi'(\theta)+\Phi_1'(\theta)]-2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi_1'(\theta)}{\delta'}\right]=0\end{cases}$$

其中
$$\delta'=-x+\frac{\theta}{\sqrt{a^2-\theta^2}}\,y_0\text{。}$$

條件(234)應該在整個區域(231)中，即在整個上半 θ 平面中滿足。

若藉下列方程來決定函數 $\Phi_1(\theta)$ 和 $\Psi_1(\theta)$，則顯然可得方程(234)的解：

$$-2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,[\Phi'(\theta)-\Phi_1'(\theta)]+(b^2-2\theta^2)\Psi_1'(\theta)=0$$

$$(b^2-2\theta^2)[\Phi'(\theta)+\Phi_1'(\theta)]-2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi_1'(\theta)=0\text{。}$$

可以證明這兩個方程不但是使得 (234) 滿足的充分條件，而且也是必要條件。解這兩方程，可得：

$$(235)\quad\begin{cases}\Phi_1'(\theta)=\dfrac{-(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\Phi'(\theta)\\[2ex] \Psi_1'(\theta)=-\dfrac{4\theta(2\theta^2-b^2)\sqrt{a^2-\theta^2}}{F(\theta)}\Phi'(\theta)\end{cases}$$

其中

$$(236)\quad F(\theta)=(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}$$

對於反射問題我們所感興趣的祇是勢函數的導數。由公式（222）可得關於位移的兩公式：

$$(237)\quad\begin{cases}u=R\left[\Phi'(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+\Phi_1'(\theta_1)\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}+\Psi_1'(\theta_2)\dfrac{\partial\theta_2}{\partial y}\right],\\[2ex] v=R\left[\Phi'(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial y}+\Phi_1'(\theta_1)\dfrac{\partial\theta_1}{\partial y}-\Psi_1'(\theta_2)\dfrac{\partial\theta_2}{\partial x}\right]\text{。}\end{cases}$$

如果沒有放射線或反射線經過 $M(t, x, y)$ 這點，則在(237)式中應除去對應的項。注意一件重要的事實：就是由假設 $\Phi'(\theta)$ 的實數部分當 $-a<\theta<+a$ 時等於零。由(225)式知 $b>a$。從這事實及(235)式立刻可知當 $-a<\theta<+a$ 時 $\Phi_1'(\theta)$ 和 $\Psi_1'(\theta)$ 的實數部分也都等於零，從而反射勢 φ_1 和 ψ_1 在位於反射線束表面的每一條反射線上取常數值，因此我們可以假設在這些線束的表面和外部他們都等於零。

若震源所發出的微擾不是縱型而是橫型，則可得另外的結果。這時已給的是個橫波勢 ψ，他是某一解析函數的實數部分

$$(238)\quad \psi=R[\Psi(\theta)],$$

這解析函數在具有割線$(-b,\ +b)$的 θ 平面中爲正則，其中複變數 θ 由方程

$$(239)\quad t-\theta x+\sqrt{b^2-\theta^2}\,(y-y_0)=0$$

決定，且當 $-b<\theta<+b$ 時 $\Psi(\theta)$ 的實數部分等於零。我們應該尋求形式如

$$(240)\quad \varphi_1=R[\Phi_1(\theta_1)];\quad \psi_1=R[\Psi_1(\theta_2)]$$

的反射縱波勢和橫波勢，其中 θ_1 和 θ_2 由方程

$$(241)\quad t-\theta_1x-\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,y-\sqrt{b^2-\theta_1^2}\,y_0=0,$$

$$(242)\quad t-\theta_2x-\sqrt{b^2-\theta_2^2}\,(y+y_0)=0$$

決定。

和前面完全一樣，對應於(235)式，我們可得下列兩個式子：

$$(243)\quad\begin{cases}\Phi_1'(\theta)=\dfrac{4\theta(2\theta^2-b^2)\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\Psi'(\theta)\\[2ex] \Psi_1'(\theta)=\dfrac{-(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\Psi'(\theta)\text{。}\end{cases}$$

現在對應於錐形束表面上的放射線的是θ平面中的割線$-b<\theta<+b$。在(243)的兩個式子裏面$\Psi'(\theta)$的係數都包含根式$\sqrt{a^2-\theta^2}$，因此祇有當$-a<\theta<+a$時這些係數纔是實數，而當$-b<\theta<-a$和$a<\theta<b$時他們就不再是實數了。這時係數的虛數部分和$\Psi'(\theta)$的虛數部分的乘積給出$\Phi_1'(\theta)$和$\Psi_1'(\theta)$的實數部分，故當

$$-b<\theta<-a \quad 及 \quad a<\theta<b \tag{244}$$

時$\Phi_1'(\theta)$和$\Psi_1'(\theta)$的實數部分不等於零。

若將(244)中的θ代入方程(241)的左邊，再分開實數和虛數部分，則這方程分解成兩個方程：

$$t-\theta x-\sqrt{b^2-\theta^2}\,y_0=0; \quad y=0\,。$$

就是說，對於反射縱波勢，這些使勢函數不等於零的臨界反射線不向介質的內部，而在平面$y=0$中進行(圖56)。就反射橫波勢言，易知由方程(242)所定義的反射線束就是以$t=x=0$，$y=-y_0$爲頂點的錐形束。錐面的母線若對應於滿足條件(244)的θ，則反射勢在其上不等於零。在這情形之下我們自然可以用[63]中說過的方法把反射橫波勢延拓到錐形束的外部去。這事實具有簡單的力學上的意義，即由震源發出的橫波到達境界線$y=0$，產生反射縱波，這縱波沿境界線傳播時比橫波爲快，他自己又產生橫波，這橫波卻進行於依照通常規則所產生的反射橫波之前。

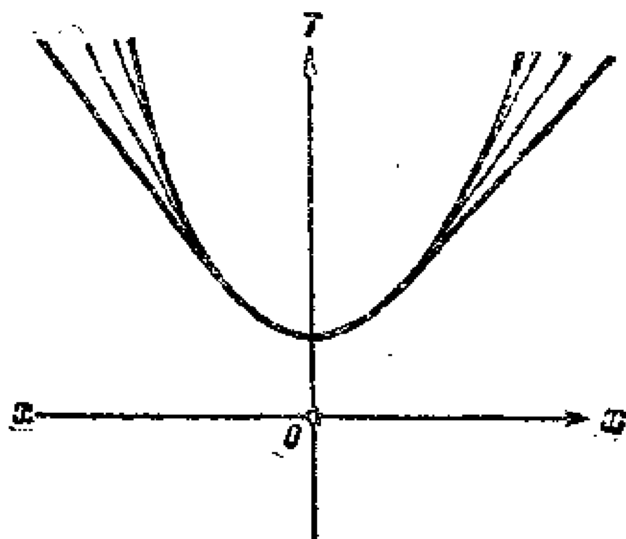


圖 56

除以上這些之外，我們不擬再詳細地研究(235)式和(243)式在力學上的意義，但有一點要注意的，即其中的分母$F(\theta)$，由方程(236)所定義，他有實零點$\theta=\pm c$，滿足不等式$c>b$。這零點的存在產生我們通常所謂的曲面波的現象。

第三章　留數理論之應用，整函數和分函數

56. 夫雷內爾積分　在 [21] 中我們證明過關於留數的基本定理，這定理是解析函數論應用於各種演算過程以及函數的解析表示的出發點。我們此後要致力於定積分的計算，線性微分方程的積分，函數的無窮級數展開和函數的路積分表示等問題的研究。

首先，我們來計算下面的定積分[II, 83]：

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx, \tag{1}$$

通常稱為夫雷內爾積分，在光的折射問題中會遇到他。先看積分

$$\int_l e^{-z^2}dz, \tag{2}$$

其中 l 是一閉線路，由實軸上的線段 $\overline{OA}$ (O 是原點)，以 O 為中心 $R=\overline{OA}$ 為半徑的圓周上的 AB 弧以及線段 $\overline{BO}$ 所組成，並且 $\overline{AOB}$ 角等於 $\frac{\pi}{4}$。在這閉線路的內部被積分函數 e^{-z^2} 沒有奇異點，因此積分（2）的值為零。把這積分依前述的三部份分做三個積分。在 $\overline{OA}$ 上 z 取實值，可設 $z=x, 0\leqslant x\leqslant R$。在 $\overline{BO}$ 上有 $z=xe^{i\frac{\pi}{4}}$，$z^2=ix^2$ 及 $dz=e^{i\frac{\pi}{4}}dx$。最後在 AB 弧上有

$$z=Re^{i\varphi}, \qquad \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$$

由此 $z^2=R^2e^{i2\varphi}$ 及 $dz=i\,Re^{i\varphi}d\varphi$。這樣就得到下面的等式：

$$\int_0^R e^{-x^2}dx+e^{i\frac{\pi}{4}}\int_R^0 e^{-ix^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} iRe^{-R^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+i\varphi}d\varphi=0\,。\tag{3}$$

現在證明上式第三個積分當 $R\to\infty$ 時趨向零。注意：當 τ 為純虛數時 e^τ 的模等於 1。故將被積函數以其模代替，可得下之不等式：

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} iRe^{-R^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+i\varphi}d\varphi\right|<R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\varphi}d\varphi\,。$$

今證上式右邊當 $R\to\infty$ 時極限為零。以另一變數 $\psi=2\varphi$ 代 φ 並且略去不關緊要的常數因子，可得：

$$R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos\psi}d\psi\,。$$

把積分的區間分為兩部分 $(0,\ \alpha)$ 和 $\left(\alpha,\ \frac{\pi}{2}\right)$，這裏 α 是 0 和 $\frac{\pi}{2}$ 之間的任一數：

(4)
$$R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos\psi}\,d\psi=\int_0^{\alpha} Re^{-R^2\cos\psi}\,d\psi+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} Re^{-R^2\cos\psi}\,d\psi\text{。}$$

在第一個積分中取負指數的最大值,即其絕對值的最小值,即$(-R^2\cos\alpha)$。又以$\frac{\sin\psi}{\sin\alpha}$乘第二個積分的被積函數,當$\alpha<\psi<\frac{\pi}{2}$時這因子常常大於1。這樣就得到:

$$\int_0^{\alpha} Re^{-R^2\cos\alpha}\,d\psi+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} R\frac{\sin\psi}{\sin\alpha}e^{-R^2\cos\psi}\,d\psi,$$

其值不比(4)式的右邊小。我們祇要證明上式的極限爲零卽可。積分出來,得到:

$$\alpha Re^{-R^2\cos\alpha}+\frac{1}{R\sin\alpha}\Big[e^{-R^2\cos\psi}\Big]_{\psi=\alpha}^{\psi=\frac{\pi}{2}}=\alpha Re^{-R^2\cos\alpha}+\frac{1-e^{-R^2\cos\alpha}}{R\sin\alpha},$$

由此立刻可知當 $R\to\infty$ 時他的極限是零。這樣我們就證明了(3)式左邊第三項的極限爲零,當 $R\to\infty$。(3)式左邊的第一項的極限是

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx,$$

如[II, 78]所證,這積分等於 $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$。由此可知(3)式左邊的第二項也有一定的極限,故當 $R\to\infty$ 時得:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_{\infty}^{0} e^{-ix^2}dx=0,$$

分開被積函數爲實數和虛數部分:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^{\infty}[\cos(x^2)-i\sin(x^2)]dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

因此等式兩邊的實數部分和虛數部分應各相等,卽得夫雷內耳積分的值爲:

(5)
$$\int_0^{\infty}\cos(x^2)dx=\int_0^{\infty}\sin(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{。}$$

57. 帶有三角函數的積分　試看形式爲:

(6)
$$\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)dx$$

的積分,其中 $R(\cos x, \sin x)$ 是 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的有理函數。引進複變數 $z=e^{ix}$ 以代實變數 x。當 x 在區間$(0, 2\pi)$中變動時複變數 z 顯綜在單位圓周上變動。又由尤拉公式可寫:

$$\cos x=\frac{z+z^{-1}}{2};\quad \sin x=\frac{z-z^{-1}}{2i},$$

又顯見 $dx=\frac{1}{iz}dz$。把這些關係代入(6)式，得到一個有理分式在單位圓周 $|z|=1$ 上面的積分。以後用 C 記這圓周。

這積分等於被積函數在單位圓內各極點的留數之和再以 $2\pi i$ 乘之。

例 I　應用上述方法於積分

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}。\qquad (0<\varepsilon<1)$$

可得

$$\int_C\frac{dz}{iz\left(1+\varepsilon\frac{z+z^{-1}}{2}\right)}$$

或

$$\frac{2}{i}\int_C\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}。$$

被積函數的極點即二次方程

$$\varepsilon z^2+2z+\varepsilon=0 \tag{7}$$

的根，其中有一根的模小於 1。這根由下式決定：

$$z_0=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon},$$

這裏根式應取正號。被積函數的留數可以照 [21] 中的規則來求，即留數等於被積函數的分子被除於分母的導數再置 $z=z_0$：

$$r=\frac{1}{2\varepsilon z_0+2}=\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

因此我們得到下面的結果：

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}。\tag{8}$$

例 II　再看一個積分

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}。\qquad (0<\varepsilon<1)$$

照前面的變換可得：

$$\frac{4}{i}\int_C\frac{z}{(\varepsilon z^2+2z+\varepsilon)^2}dz。$$

現在 $z=z_0$ 是單位圓內唯一的極點，但爲二階極點。依照[21]中所講，在這點的留數等於被積函數先以 $(z-z_0)^2$ 乘之，然後求一次導數，再置 $z=z_0$。設 $z=z_1$ 爲方程(7)的第二個根，其模大於 1：

$$z_1=\frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}。$$

因此留數爲：

$$r=\left[\frac{z}{\varepsilon^2(z-z_1)^2}\right]'_{z=z_0}=-\frac{z+z_1}{\varepsilon^2(z-z_1)^3}\bigg|_{z=z_0},$$

置 $z=z_0$ 以後，由 z_0 和 z_1 的數值可知：

$$r=\frac{1}{4(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}。$$

最後由留數定理有：

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}=\frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}。\tag{9}$$

68. 有理分式的積分　試看有理分式的積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx。\tag{10}$$

這積分要有意義的充要條件 [II, 82] 是分母中的多項式 $\psi(x)$ 沒有實零點，並且次數至少比多項式 $\varphi(x)$ 的次數高兩次。這時若看複函數

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

則顯見當 $z\to\infty$ 時 $zf(z)\to 0$，並且是一致地趨向零，卽和 $z\to\infty$ 的方式無關。嚴格地說，這裏所謂一致趨向零就是：對於任意小的正數 ε 存在正數 R_ε，使當 $|z|>R_\varepsilon$ 時有 $|zf(z)|<\varepsilon$。現在要證明：如果函數 $f(z)$ 滿足這條件，則當 $R\to\infty$ 時 $f(z)$ 沿圓周 $|z|=R$ 上任一弧的積分的極限爲零。

輔助定理　若 $f(z)$ 在無限遠點的鄰域中爲正則，又當 $z\to\infty$ 時 $zf(z)\to 0$，則當 $R\to\infty$ 時 $f(z)$ 沿圓周 $|z|=R$ 上任一弧的積分的極限爲零。

對 $f(z)$ 的積分應用通常的估計[4]，可得：

$$\left|\int_l f(z)dz\right|=\left|\int_l zf(z)\frac{1}{z}dz\right|\leqslant\max_{\text{在} l \text{上}}\left|zf(z)\right|\frac{s}{R},$$

其中 s 是弧 l 的長，顯然 s 不大於 $2\pi R$，因此

$$\left|\int_{l} f(z)dz\right| \leqslant 2\pi \max_{\text{在}l\text{上}} \left| zf(z)\right|。$$

由假設 $zf(z)\to 0$，當 R 無限增大時，立刻得到我們所要證明的結果。

回到前面的例子。做有理分式 $\varphi(z):\psi(z)$ 沿着下面這閉線路的積分：卽實軸上的線段 $(-R,+R)$ 和以這線段為直徑的上半平面中的上半圓周。我們可以取 R 如此之大，使得上半平面中函數 $f(z)$ 的全部極點都在這半圓之內。設以 C_R 記這半圓周，則有：

$$\int_{-R}^{+R}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx+\int_{C_R}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}dz=2\pi i\sum r, \tag{11}$$

其中 $\sum r$ 表示函數 $f(z)$ 在上半平面中各極點的留數的和。當 R 無限增大時等式右邊不變其值，而由輔助定理等式左邊第二項的極限為零，故得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx=2\pi i\sum r,$$

卽有理分式的積分(10)等於這分式在上半平面中各極點的留數之和再乘 $2\pi i$。

例　試看積分
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}。$$

現在被積函數在上半平面中祇有唯一的 n 階極點 $z=i$。由[21]所說，要決定在這點的留數可先以 $(z-i)^n$ 乘被積函數 $(z^2+1)^{-n}$，然後關於 z 微分 $(n-1)$ 次，再以 $(n-1)!$ 除之，最後置 $z=i$，卽得所求的留數。故

$$r=\frac{1}{(n-1)!}\left.\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{(z-i)^n}{(z^2+1)^n}\right|_{z=i}=\frac{1}{(n-1)!}\left.\frac{d^{n-1}(z+i)^{-n}}{dz^{n-1}}\right|_{z=i}$$

或
$$r=\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-n+2)(2i)^{-2n+1}}{(n-1)!}=-\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!2^{2n-1}}i,$$

最後卽得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\frac{\pi}{2^{2n-2}}。\tag{12}$$

59. 幾種帶有三角函數的新型積分　我們注意在證明上節無限積

分的計算規則時並未用到被積函數 $f(z)$ 是有理分式這件事。我們只要函數 $f(z)$ 滿足下列兩個條件就夠了：第一，他應該在上半平面及實軸上為正則，當然除了在上半平面中的極點以外；第二，當 $z\to\infty$ 在這區域中時，$zf(z)$ 一致地趨向零。這時，和上節一樣可以得到(11)的等式，而其中左邊第二項的極限為零，故取極限後有：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)dx = 2\pi i\sum r, \tag{13}$$

其中 $\sum r$ 表示 $f(z)$ 在上半平面中各極點的留數的和。將積分的區間 $(-R,+R)$ 分為兩部分 $(-R,0)$ 和 $(0,+R)$，再在第一區間的積分中改 x 為 $(-x)$，可改寫等式(13)為：

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R [f(x)+f(-x)]\,dx = 2\pi i\sum r$$

或

$$\int_0^\infty [f(x)+f(-x)]\,dx = 2\pi i\sum r。 \tag{14}$$

現在應用這結果於一個特別情形，即當被積函數為

$$f(z) = F(z)e^{imz}, \qquad (m>0) \tag{15}$$

而函數 $F(z)$ 滿足前述兩條件。此時易知函數 $f(z)$ 也滿足這兩個條件。要證明這事祇須證明 e^{imz} 在全平面上為正則，又在上半平面和實軸上為有界。顯然

$$e^{imz} = e^{im(x+iy)}, \quad |e^{imz}| = e^{-my}, \qquad (m>0; y\geqslant 0)$$

因此當 $y\geqslant 0$ 時 $|e^{imz}|\leqslant 1$。故若 $F(z)$ 滿足前述兩條件，則

$$\int_0^\infty [F(x)e^{imx}+F(-x)e^{-imx}]\,dx = 2\pi i\sum r, \tag{16}$$

其中 $\sum r$ 表示函數(15)在上半平面中留數之和。看兩個特別情形。先設 $F(z)$ 為偶函數，即 $F(-z)=F(z)$，由上式有：

$$(17)\qquad \int_0^\infty F(x)\cos mx\,dx=\pi i\sum r\text{。}$$

若 $F(z)$ 爲奇函數，即 $F(-z)=-F(z)$，則得：

$$(18)\qquad \int_0^\infty F(x)\sin mx\,dx=\pi\sum r\text{。}$$

例 I　試看積分

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx\text{。}\qquad (a>0;\ m>0)$$

這裏函數　$F(z)=\dfrac{1}{a^2+z^2}$

顯然滿足前述兩條件，並且是偶函數，故可應用公式(17)。函數

$$(19)\qquad f(z)=\frac{e^{imz}}{a^2+z^2}$$

在上半平面中唯一的極點爲單極點 $z=ia$。我們可以照以前用過的規則來求在這極點的留數。這規則簡單地說起來即：以分母的導數去除分子。在我們的情形容易算出函數(19)的留數是

$$r=\frac{e^{-ma}}{i2a},$$

故最後有：

$$(20)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{2a}e^{-ma}\text{。}$$

例 II　再看積分

$$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx,$$

這時應該用公式(18)，及函數　$f(z)=\dfrac{ze^{imz}}{(z^2+a^2)^2}$。

在上半平面中有唯一的二階極點 $z=ia$。在這極點的留數可由下式決定：

$$r=\frac{d}{dz}\left[\frac{ze^{imz}}{(z^2+a^2)^2}(z-ia)^2\right]\Bigg|_{z=ia}$$

或

$$r=\frac{d}{dz}\left[\frac{ze^{imz}}{(z+ia)^2}\right]\Bigg|_{z=ia}=\frac{m}{4a}e^{-ma},$$

由此即得結果

$$(21)\qquad \int_0^\infty \frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{\pi m}{4a}e^{-ma}\text{。}$$

注意　一般而論，我們不能將公式(13)寫成

(22)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum r。$$

實際上，無限積分
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$
的定義就是兩積分
$$\int_0^R f(x)dx \text{ 和 } \int_{-R}^0 f(x)dx$$
當 $R \to (+\infty)$ 時的極限的和。若這兩積分各自的極限不存在，但他們的和趨向有限極限值，即
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)dx$$
為有限值，則這極限值稱為無限區間上積分的主值，記為：

(23)
$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)dx。$$

公式(13)中應該把積分看成主值的意義。但若由某種判斷知道這積分在普通的廣義積分的意義下也存在，那末就可以不必如此去了解他，因為這時廣義積分和積分主值必定符合。在[26]中我們定義了積分的主值，當 $f(x)$ 的連續性在若干有限遠點有間斷時。

60. 約當輔助定理　利用一個以後常用的重要的輔助定理我們可以把上節中施於 $F(z)$ 的條件減輕而仍可得到公式(17)和(18)。

約當輔助定理　設在上半平面中及實軸上當 $z\to\infty$ 時函數 $F(z)$ 一致地趨向零，又 m 為一正數，則

(24)
$$\int_{C_R} F(z)e^{miz}dz \to 0,$$

其中 C_R 是以原點為中心，半徑等於 R，位在上半平面中的半圓周。

引進極坐標 $z = Re^{i\varphi}$，可將(24)式改寫為：
$$\int_0^{\pi} F(Re^{i\varphi})e^{imR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\, iRe^{i\varphi}d\varphi,$$

由這式和 $|ie^{imR\cos\varphi+i\varphi}|=1$ 有：

$$\left|\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz\right|<\int_0^{\pi}|F(Re^{i\varphi})|e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi,$$

或

$$(25)\qquad \left|\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz\right|\leqslant \max_{\text{在}C_R\text{上}}\left|F(z)\right|\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi_{\circ}$$

由假設當 $R\to\infty$ 時 $|F(Re^{i\varphi})|\to 0$ 一致地關於 φ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，因此祇要證明當 $R\to\infty$ 時積分

$$(26)\qquad \int_0^{\pi}e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi$$

的數值為有界即可。將積分區間分成兩半：$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，並在第二區間上的積分中改 φ 為 $(\pi-\varphi)$，則積分(26)變成：

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi_{\circ}$$

現在我們仿照[56]中一樣去做。將積分區間分為兩段，並增大被積函數，可得不等式：

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi<2\int_0^{\alpha}e^{-mR\sin\varphi}R\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}d\varphi+2\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\sin\alpha}Rd\varphi_{\circ}$$

把不等式右邊積分出來，得：

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi<\frac{2}{m\cos\alpha}\Big[-e^{-mR\sin\varphi}\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha}+2e^{-mR\sin\alpha}R\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)_{\circ}$$

不等式右邊第二項當 $R\to\infty$ 時顯然極限為零，而第一項則趨向有限極限值 $\frac{2}{m\cos\alpha}$，故當 $R\to\infty$ 時右邊之和為有界。所以(26)的積分亦為有界，而輔助定理卽得證明。

利用這輔助定理我們可以減輕關於函數 $F(z)$ 的假設而證明公式(18)。實際上，以前我們假設：在上半平面中和實軸上當 $|z|\to\infty$ 時

$zF(z)\to 0$。這個要求是要使得當 $R\to\infty$ 時沿上半圓周 C_R 的積分

$$\int_{C_R} F(z)e^{imz}\,dz$$

以零爲極限。由輔助定理我們祇須假設 $F(z)\to 0$ 就夠了，因此原來的條件 $zF(z)\to 0$ 可以改成 $F(z)\to 0$ 而公式(18)仍成立。

例 試看積分

$$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}dx。\qquad (a>0;\ m>0)$$

這時函數

$$F(z)=\frac{z}{z^2+a^2}$$

滿足公式(18)所有的條件，因此和以前一樣應該決定函數

$$F(z)e^{imz}=\frac{ze^{imz}}{z^2+a^2}$$

在上半平面中的極點 $z=ia$ 的留數。這是個單極點，故可照通常的規則決定在這點的留數，即以分母的導數去除分子：

$$r=\frac{ze^{imz}}{2z}\Big|_{z=ia}=\frac{1}{2}e^{-ma},$$

最後

$$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-ma}。\tag{27}$$

61. 若干函數的路積分表示 利用留數定理可以很容易地寫出某些不連續函數的路積分表示。

例如設函數 $\varphi(t)$ 當 $t<0$ 時等於零，當 $t>0$ 時等於 1，即

$$\varphi(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)。\end{cases}\tag{28}$$

現在要證明這函數可以用下面的路積分表示：

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{w}\frac{e^{itz}}{z}dz,\tag{29}$$

t 是被積函數中的參數。積分線路是全部實軸，但在原點 $z=0$ 的附近不取實軸上的線段而繞道經過以原點爲中心半徑很小且位於下半平面中的半圓周(圖 57)。做一輔助線路 l_R，他是由實軸上的線段 $(-R,+R)$ 和以原點爲中心半徑等於 R 且位於上半平面中的半圓周 C_R 所構成，但線段 $(-R,+R)$ 在原點附近有和前述線路一樣的繞道。若 $t>0$，則對積分 (29) 應用約當輔助定理可知當 R 無限增大時沿半圓周 C_R 的積分以零爲極限。但是被積函數在 l_R 的內部以原點 $z=0$ 爲唯一的單極點，其留數等於 1。故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l_R}\frac{e^{itz}}{z}dz=1\text{。}$$

將 R 無限增大卽得
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{w}\frac{e^{itz}}{z}dz=1\text{。}\qquad (t>0)$$

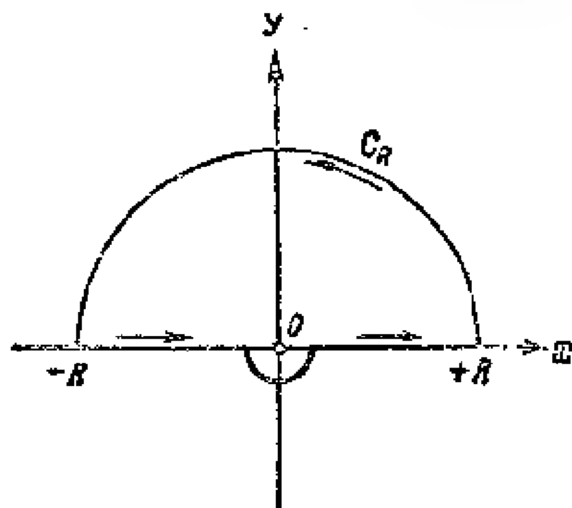


圖 57

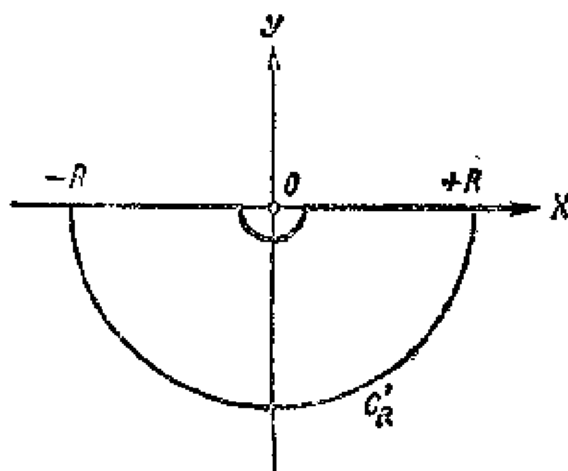


圖 58

現在設 $t<0$。考察由實軸上的線段 $(-R, +R)$ 在原點附近有和前面一樣的繞道,和以原點爲中心半徑等於 R 且位於下半平面中的半圓周 C_R' 所構成的閉線路(圖 58)。在這閉線路內部函數 $\frac{1}{z}$ 沒有奇異點,故沿這閉線路的積分(29)等於零。

現在證明當 R 無限增大時沿下半圓周 C_R' 的積分以零爲極限。實際上,若以另一積分變數 $z'=-z$ 代替 z, 則下半圓周變成上半圓周,所以

$$\int_{C_R'}\frac{e^{itz}}{z}dz=\int_{C_R}\frac{e^{-itz'}}{z'}dz'\text{。}$$

因 $t<0$, 故 $-t>0$, 約當輔助定理告訴我們上式後一積分以零爲極限。故當 $R\to\infty$ 時可得:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{w}\frac{e^{itz}}{z}dz=0\text{。}\qquad (t<0)$$

最後看 $t=0$ 的情形。這時(29)變爲:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{w}\frac{1}{z}dz\text{。}\qquad (30)$$

我們需要計算 $\lg z$ 的改變量,當 z 經過 $(-R, +R)$ 和在原點附近的繞道時。在這線路的兩頭 $\lg z$ 的實數部分都等於 $\lg R$, 所以沒有得到什麼改變量。又 $\lg z$ 的虛數部分 $i\arg z$ 當 z 走過原點附近的半圓周繞道時顯然得到改變量 πi, 而在路線的其他部分倘不起變化。因此沿着線段 $(-R, +R)$ 的積分(30)等於 $\frac{1}{2}$。將 $R\to\infty$, 得:

(31)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{v}\frac{1}{z}dz=\frac{1}{2}。$$

這例子中重要的地方是在當積分的上下限同時趨於 ∞ 時他們有相同的絕對值，就是說，等式(31)應當了解爲在區間(−∞，+∞)中積分的主值，但在 $z=0$ 有繞道。當 $t\neq0$ 時積分(29)在通常的無限積分意義之下亦爲收斂。實際上，分開實數和虛數部分可得兩積分

$$\int_a^\infty\frac{\cos tz}{z}dz \quad 和 \quad \int_a^\infty\frac{\sin tz}{z}dz。\qquad (a>0)$$

第二積分的收斂性早在[II，83]中證明過。第一積分的收斂性可用同樣方法證明之。因此當 $t\neq0$ 時積分(29)表示函數(28)。當 $t=0$ 時僅積分的主值存在，其值爲 $\frac{1}{2}$。

現在看第二個例子。設函數除在某一有界線段上等於 1 以外處處等於零，即

(32)
$$\psi(t)=0 \quad 當 \quad t<a \quad 或 \quad t>b; \quad \psi(t)=1 \quad 當 \quad a<t<b。$$

易證這函數可以表示爲形如前例的兩個積分的差，即

(33)
$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{v}\frac{e^{i(b-t)z}}{z}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{v}\frac{e^{i(a-t)z}}{z}dz。$$

當 $t>b$ 時上式右邊兩項都等於零。在區間 $a<t<b$ 中第一項等於 1，而第二項仍等於零，故其差爲 1。最後，當 $t<a$ 時兩項都等於 1，故其差爲零。所以確乎是 $\psi(t)$ 的表示式。這函數的圖形如圖 59 所示。

現在再看一個函數：當 $t<0$ 時他等於零，從 $t=0$ 以後函數從始值 1 開始依指數規律逐漸減小：

(34)
$$\varphi_1(t)=0 \quad (t<0); \quad \varphi_1(t)=e^{-\alpha t} \quad (t>0)。\qquad (\alpha>0)$$

圖 60 是這函數的圖形。不難知道這函數可用下面的路積分來表示：

(35)
$$\varphi_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itz}}{z-i\alpha}dz，$$

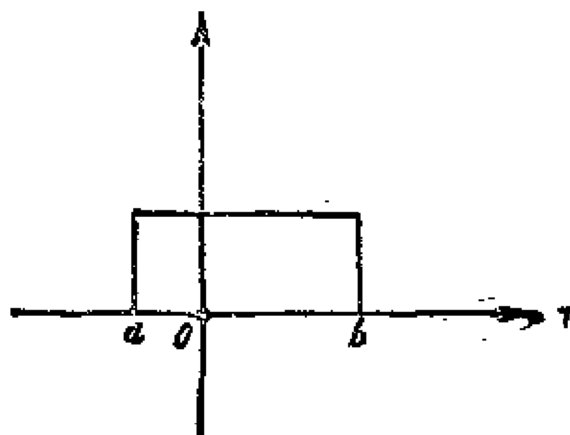


圖 59

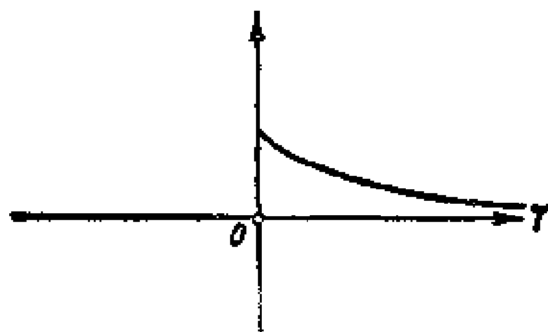


圖 60

這裏路積分沿着實軸進行。這公式的證明可逐字仿照證明公式(29)時一樣去做。但現在函

數

$$\frac{e^{itz}}{z-i\alpha}$$

在極點 $z=i\alpha$ 的留數等於 $e^{-\alpha t}$。

最後，看一函數當 $t<0$ 時等於零，當 $t>0$ 等於正弦函數：

$$(36)\quad \begin{cases}\psi_1(t)=0 \quad 當 \quad t<0;\\ \psi_1(t)=\sin\alpha t \quad 當 \quad t>0 \qquad (\alpha 為實數)。\end{cases}$$

如前一樣易證這函數可表示為：

$$(37)\quad \psi_1(t)=R\left[\frac{-1}{2\pi}\int_{v}\frac{e^{itz}}{z-\alpha}dz\right],$$

積分線路沿着實軸，但在被積函數的極點 $z=\alpha$ 附近有繞道。這時被積函數在極點的留數等於

$$e^{it\alpha}=\cos\alpha t+i\sin\alpha t,$$

因此分開實數部分卽得公式(37)。

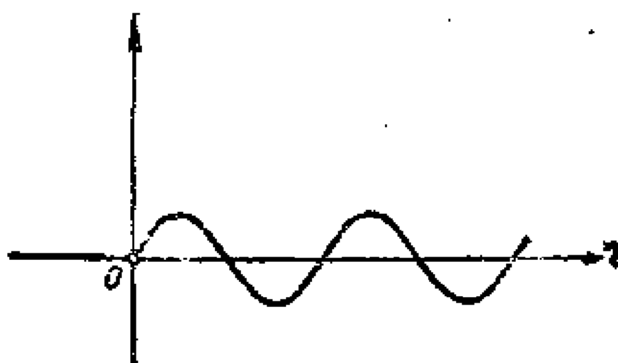


圖 61

有時得到的公式寫成另一形式，卽不沿實軸積分而沿虛軸積分，這時極點附近的繞道取在右邊，卽在虛軸的那一邊，其處複數的實數部分常為正。要得到這種路積分，祇須把平面繞着原點逆時針地旋轉角度 $\frac{\pi}{2}$，卽以另一變數 $z'=iz$ 代替 z，卽 $z=\frac{1}{i}z'$。經過這變換，公式(29)變成：

$$(29_1)\quad \varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\flat}\frac{e^{tz'}}{z'}dz'。$$

公式(35)經過這變換後，極點不再是虛軸上的 $i\alpha$，而是在負實軸上，函數 $\varphi_1(t)$ 的表示式如

$$(35_1)\quad \varphi_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{e^{tz'}}{z'+\alpha}dz'。$$

同樣函數 $\psi_1(t)$ 的表示式為：

$$\psi_1(t)=R\left[-\frac{1}{2\pi}\int_{\flat}\frac{e^{tz'}}{z'-i\alpha}dz'\right]。$$

這一節的內容和以後將在第四卷中講到的所謂拉普拉斯變換有直接的關係。

62. 多值函數積分的例子　我們現在來看幾個被積函數是多值複函數的積分。第一個例子是如下形式的積分

$$(38)\qquad \int_l (-z)^{a-1}Q(z)dz,$$

其中 a 是實數，$Q(z)$ 是有理函數，且當 $z\to 0$ 或 $z\to\infty$ 時 $z^aQ(z)\to 0$。被積函數是多值的，因爲當 z 逆時針地繞着 $z=0$ 走一週時，$(-z)$ 也這樣走了一週，因此輻角得到改變量 2π，$(-z)$ 得到一個乘數 $e^{2\pi i}$，而 $(-z)^{a-1}$ 在繞 $z=0$ 一週後成爲 $(-z)^{a-1}e^{2(a-1)\pi i}$，即函數得到一個乘數 $e^{2(a-1)\pi i}$，若 a 不是整數，則這乘數不等於 1。故原點是被積函數的支點。要使這函數變爲單值，可以從 $z=0$ 沿正實軸做一條割線。在這樣被割過的平面 T 中被積函數自然已經是單值了。但是要完全決定他的話，還須在平面 T 中的某一點固定 $(-z)$ 的輻角。例如可設在割線的上岸某一 z 取正值的點負數 $(-z)$ 的輻角等於 $(-\pi)$。若沿一閉線路繞着原點走一週，則 $(-z)$ 從割線的上岸移到割線的下岸，輻角增加 2π，因此在割線的下岸我們應定 $(-z)$ 的輻角爲 π。設以 x 記 z 的模，則有：

$$(-z)=xe^{-i\pi}\quad \text{在上岸},\qquad (-z)=xe^{i\pi}\quad \text{在下岸。}$$

從而

$$(39)\qquad \begin{aligned}(-z)^{a-1}&=x^{a-1}e^{-i(a-1)\pi}\quad \text{在上岸},\\ (-z)^{a-1}&=x^{a-1}e^{i(a-1)\pi}\quad \text{在下岸。}\end{aligned}$$

現在再來規定積分(38)的路線 l。這是個閉曲線，由下面四部分所構成：割線上岸的線段 (ε, R)；以原點爲中心半徑等於 R 的圓周 C_R，逆時針方向進行；割線下岸的線段 (R, ε)；以原點爲中心半徑等於 ε 的圓周 C_ε，順時針方向進行（圖 62）。要積分沿正實軸爲可能，必須有理分式 $Q(z)$ 在正實軸上沒有極點。由留數定理知積分 (38) 的值等於以 $2\pi i$ 來乘被積函數在 $Q(z)$ 的各極點的留數之和，因爲這時 $Q(z)$ 的極點也就是被積函數的極點。當然我們可以取 ε 如此之小，取 R 如此之大，使得全部的極點都含於 l 的內部。現在證明當 $R\to\infty$ 及 $\varepsilon\to 0$ 時沿 C_R 及 C_ε 的積分以零爲極限。實際上，用通常的估計有：

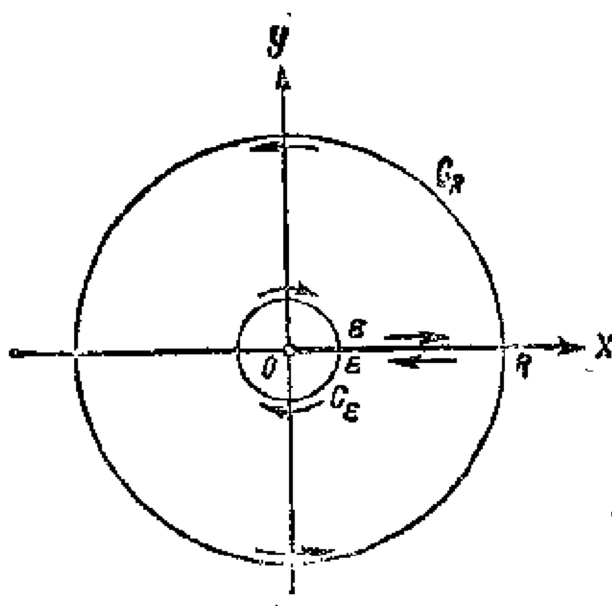


圖 62

$$\left|\int_{C_R}(-z)^{a-1}Q(z)dz\right|\leqslant 2\pi R\cdot R^{a-1}\max_{\text{在}C_R\text{上}}|Q(z)|=2\pi R^a\max_{\text{在}C_R\text{上}}|Q(z)|。$$

但由假設當 $|z|\to\infty$ 時 $z^aQ(z)\to 0$，故上式右邊當 $R\to\infty$ 時確以零爲極限。同樣在圓周 C_ε 上有：

$$\left|\int_{C_\varepsilon}(-z)^{a-1}Q(z)dz\right|<2\pi\varepsilon^a\max_{在C_\varepsilon上}|Q(z)|,$$

由假設當 $z\to0$ 時 $z^aQ(z)\to0$，故上式右邊當 $\varepsilon\to0$ 時以零爲極限。所以取極限以後，僅剩在割線上岸和下岸上的積分，而被積函數在這兩岸上的值由公式 (39) 決定。我們就得到下面的公式

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\R\to\infty}}\int_\varepsilon^R\left[x^{a-1}e^{-i\pi(a-1)}Q(x)-x^{a-1}e^{i\pi(a-1)}Q(x)\right]dx=2\pi i\sum r,$$

其中 $\sum r$ 表示函數 $(-z)^{a-1}Q(z)$ 在各個有限遠極點的留數的和。

因爲 $e^{-i\pi}=e^{i\pi}=-1$，上式可改寫爲：

$$(e^{i\pi a}-e^{-i\pi a})\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)dx=2\pi i\sum r,$$

或由尤拉公式有：

(40)
$$\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)dx=\frac{\pi}{\sin a\pi}\sum r。$$

用公式 (40) 可以計算許多原函數不能以有限形式來表示的定積分的值。我們不妨再回顧一下(40)式成立時 $Q(z)$ 應該滿足的條件：$Q(z)$ 必須是有理分式，在正實軸上沒有極點，並且

$$當\quad z\to0\quad 和\quad z\to\infty\quad 時\quad z^aQ(z)\to0。$$

現在舉一個特別的積分爲例：

(41)
$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{1+x}dx。\qquad(0<a<1)$$

這時易見函數
$$Q(z)=\frac{1}{1+z}$$

滿足以上的條件且有唯一的極點 $z=-1$。在這極點函數

$$\frac{(-z)^{a-1}}{1+z}$$

的留數可依下之規則計算：分子被除於分母的導數，即

$$r=(-z)^{a-1}\Big|_{z=-1}。$$

注意：當計算函數 $(-z)^{a-1}$ 在 $z=-1$ 的值時，我們應該遵照前面已給的關於這多值函數的規定，即在割線的上岸 $(-z)$ 的幅角等於 $(-\pi)$，因此繞着原點轉了半圈而至負實軸上時 $(-z)$ 的幅角等於零。換句話說，

$$r=1。$$

最後，由公式 (40) 知積分 (41) 的值爲：

(42)
$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin a\pi}。$$

再看第二個多值函數的積分的例子：

(43) $$\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}\,dz,$$

這裏我們假設 $A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}$ 有實係數，且有兩個不相等的實零點 $z=z_1$ 和 $z=z_2$，$0<z_1<z_2$。

再設 $A<0$，則當 $z_1<z<z_2$ 時這三項式的值爲正。在(43)中積分係沿實軸上的線段 $z_1\leqslant z\leqslant z_2$ 進行，並且在這線段上根式取正值。被積函數

(44) $$\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}=\frac{\sqrt{A(z-z_1)(z-z_2)}}{z}$$

以 z_1 和 z_2 爲一階支點。若沿實軸上的線段 (z_1, z_2) 作割線，則函數(44)在被割的平面 T 中爲單值正則[19]。

我們假定根式在割線的下岸取正值。要到達上岸必須繞過一個支點，而在上岸根式將取負值[19]。現在假設做這根式在割線兩岸上正方向的積分，即做函數(44)沿下岸的積分時其方向從 z_1 到 z_2，沿上岸積分時方向從 z_2 到 z_1。第一部分顯然就是積分(43)。又第二部分在割線的上岸，這時根式改取負值，但積分的方向恰好也換過，因此積分的數值和沿下岸積分的數值相等。換句話說，根式在割線兩岸上正方向的積分等於積分(43)的兩倍。

由勾界定理我們可以在函數(44)爲正則的區域中連續將閉線路變形而不至影響積分的數值。現在假設 l 是包含前述割線在其內部但是函數(44)的極點 $z=0$ 卻在其外部的閉線路，則有：

(45) $$J=\frac{1}{2}\int_l\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}\,dz,$$

這裏 J 表示積分(43)的值。

現在要決定函數(44)在 $z=\infty$ 和 $z=0$ 兩點附近的展開式。在前一場合我們可寫：

$$\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}=\sqrt{A}\left[1+\left(2\frac{B}{Az}+\frac{C}{Az^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

由牛頓式二項式公式有：

(46) $$\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}=\sqrt{A}\left(1+\frac{B}{A}\frac{1}{z}+\cdots\right),$$

再決定這公式中根式 $\sqrt{A}$ 的值。回到(44)式的右邊。由假定他應在割線 (z_1, z_2) 的下岸取正值。要從這下岸到達實軸上的線段 $(z_2, +\infty)$ 必須逆時針地繞過 $z=z_2$。在這過程中 $(z-z_2)$ 的幅角增加 π，故(44)式的幅角增加 $\frac{\pi}{2}$，即其幅角由零增爲 $\frac{\pi}{2}$。換句話說，在實軸上的線段 $(z_2, +\infty)$ 中函數(44)應取正虛值（即形式爲 ai，$a>0$）。由(46)式知根式 $\sqrt{A}$ 應取正虛值。

完全一樣，要從割線 (z_1, z_2) 的下岸到達線段 $(0, z_1)$，必須順時針地繞過 $z=z_1$，經過這

步驟以後(44)的幅角是 $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，即應在$(0, z_1)$上取負虛值。

寫出函數(44)在 $z=0$ 附近的展開式：

$$\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}=\frac{\sqrt{C}}{z}\left[1+\left(2\frac{Bz}{C}+\frac{Az^2}{C}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

或由二項式公式：

$$\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}=\frac{\sqrt{C}}{z}\left(1+\frac{B}{C}z+\cdots\right), \tag{47}$$

由上面的論斷知道$\sqrt{C}$應取負虛值。注意：由假設 $A<0$ 及不等式 $z_2>z_1>0$ 可推出$C<0$。

由勾舉定理函數(44)沿 $z=\infty$ 鄰域中甚大的閉線路 L 的積分等於 l 上的積分加上環繞 $z=0$ 的線路 λ 上的積分，其中每一積分都是逆時針方向。而沿 L 和 λ 的積分等於以 $2\pi i$ 乘(46)和(47)中 z^{-1} 的係數，故得：

$$\int_l\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}\,dz=2\pi i\left(\frac{B}{\sqrt{A}}-\sqrt{C}\right).$$

再由(45)式即得積分(43)的值：

$$J=\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}\,dz=\pi i\left(\frac{B}{\sqrt{A}}-\sqrt{C}\right)。 \tag{48}$$

63. 係數為常數的線性方程組的積分　現在要應用留數理論於係數為常數的線性齊次方程組的積分問題。設這方程組為：

$$\begin{cases}x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n'=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{cases} \tag{49}$$

其中係數 a_{ik} 是常數，x_s' 表示所求的函數關於自變數 t 的導數。我們要找尋這方程組的形式如

$$x_s=\sum_R\varphi_s(z)e^{tz}, \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{50}$$

的解，這裏 $\varphi_s(z)$ 是 z 的有理函數，又記號

$$\sum_R f(z)$$

以後常表示函數 $f(z)$ 在其所有有限遠奇異點的留數的和。公式(50)中記號 $\sum\limits_R$ 以內的函數不但和我們要計算留數的複變數 z 有關，並且也

和實參數 t 有關,因爲,一般而論,留數之和是參數 t 的函數。因 z 和 t 完全互相獨立,當我們關於 t 微分函數(50)時可以把微分符號拿進 $\sum\limits_{R}$ 以內去,卽若先求函數

(51) $$\varphi_s(z)e^{tz}$$

關於 t 的導數,再把這導數的留數相加,和先把函數(51)的留數相加,然後再關於 t 微分,結果是一樣的。故將(50)式關於 t 微分,得:

(52) $$x_s' = \sum_R z\varphi_s(z)e^{tz} \qquad (s=1,2,\cdots,n)。$$

把這些式子代入(49)的方程組並且移項到等式的一邊:

$$\sum_R [(a_{11}-z)\varphi_1(z)+a_{12}\varphi_2(z)+\cdots+a_{1n}\varphi_n(z)]e^{tz}=0$$

$$\sum_R [a_{21}\varphi_1(z)+(a_{22}-z)\varphi_2(z)+\cdots+a_{2n}\varphi_n(z)]e^{tz}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_R [a_{n1}\varphi_1(z)+a_{n2}\varphi_2(z)+\cdots+(a_{nn}-z)\varphi_n(z)]e^{tz}=0$$

如果令以上諸式中方括弧以內的式子等於任意常數,則這些等式當然成立,因爲這時在 $\sum\limits_{R}$ 以內是形式爲 Ce^{tz} 的函數,他在全平面中除 ∞ 外別無奇異點。記這些任意常數爲 $-C_1, -C_2, \cdots, -C_n$, 可以得到用以決定函數 $\varphi_s(z)$ 的尋常一次代數方程組:

$$(a_{11}-z)\varphi_1(z)+a_{12}\varphi_2(z)+\cdots+a_{1n}\varphi_n(z)=-C_1$$

$$a_{21}\varphi_1(z)+(a_{22}-z)\varphi_2(z)+\cdots+a_{2n}\varphi_n(z)=-C_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}\varphi_1(z)+a_{n2}\varphi_2(z)+\cdots+(a_{nn}-z)\varphi_n(z)=-C_n$$

用克拉每公式解這方程組:

(53) $$\varphi_s(z)=\frac{\Delta_s(z)}{\Delta(z)}, \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

其中

$$\Delta(z)=\begin{vmatrix} a_{11}-z, & a_{12},\cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-z,\cdots, & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}, & a_{n2},\cdots, & a_{nn}-z \end{vmatrix}, \tag{54}$$

$\Delta_s(z)$ 是由行列式 $\Delta(z)$ 中改其第 s 行的各元素爲諸常數 $(-C_k)$ 而得。注意：行列式 $\Delta(z)$ 就是我們早已知道的特徵方程式的左邊[II[1, 17]。把我們所得到的(53)各式代入(50)式中，卽得方程組(49)的解：

$$x_s=\sum_R\frac{\Delta_s(z)}{\Delta(z)}e^{tz}, \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{55}$$

其中 $\Delta(z)$ 和 $\Delta_s(z)$ 的意義如前。

現在再證明我們所得到的解滿足初始條件：

$$x_1\Big|_{t=0}=C_1;\ \ x_2\Big|_{t=0}=C_2;\ \cdots,\ x_n\Big|_{t=0}=C_n。 \tag{56}$$

顯然祇要證明第一個條件能滿足就夠了。我們有：

$$x_1\Big|_{t=0}=\sum_R\frac{\Delta_1(z)}{\Delta(z)}。 \tag{57}$$

由(54)式知道上式右邊的分數的分母是個 n 次多項式，其最高項爲 $(-1)^n z^n$，這分數的分子是：

$$\Delta_1(z)=\begin{vmatrix} -C_1, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ -C_2, & a_{22}-z, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -C_n, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn}-z \end{vmatrix}。$$

將這行列式依第一行的元素展開，易知所得爲一 $(n-1)$ 次多項式，其最高項爲 $(-1)^n C_1 z^{n-1}$，因此(57)式可以改寫爲：

$$x_1\Big|_{t=0}=\sum_R\frac{(-1)^n C_1 z^{n-1}+\cdots}{(-1)^n z^n+\cdots}, \tag{58}$$

其中…表示多項式中次數較低的各項，他們在以後的計算中不發生影響。

現在說一點關於有理分式留數的和的一般應用。

輔助定理　有理分式在其各有限遠極點的留數的和等於他在無限遠點鄰域中的展開式裏面 z^{-1} 的係數。

實際上，假設有理分式在無限遠點鄰域中的展開式爲：

$$f(z)=\sum_{k} b_k z^k。\tag{59}$$

考察積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} f(z)dz,$$

其中 C_R 是以原點爲中心半徑等於 R 的圓周。對於足夠大的 R，C_R 包含 $f(z)$ 全部的極點在其內部，所以上面這積分表示在這些極點的留數的和。但另一方面，當 R 甚大時圓周 C_R 在無限遠點的鄰域中，故可利用展開式(59)以計算積分的值，由此立刻知道其值爲 b_{-1}，輔助定理乃得證明。

注意：在[17]中我們稱$(-b_{-1})$爲函數 $f(z)$ 在無限遠點的留數，由此可將上之輔助定理改述如下：有理分式在其全部極點（包括無限遠點在內）的留數的和等於零。

現在把這輔助定理應用於 (58) 式，其中的分數在無限遠點鄰域中的展開式爲：

$$\frac{(-1)^n C_1 z^{n-1}+\cdots}{(-1)^n z^n+\cdots}=\frac{C_1}{z}+\frac{\beta_2}{z^2}+\cdots,$$

由這結果立刻可得 $x_1\Big|_{t=0}=C_1$，同樣可證 $x_s\Big|_{t=0}=C_s$。因此(55)式中的解滿足初始條件(56)，就是說，多項式 $\Delta_s(z)$ 中的任意常數 C_s 是 x_s 的始值，而(55)式也就表示方程組(49)的一般積分。

例　考察方程組

$$\begin{aligned}
x_1' &= \qquad x_2+x_3\\
x_2' &= x_1 \qquad +x_3\\
x_3' &= x_1+x_2
\end{aligned}$$

這時
$$\Delta(z)=\begin{vmatrix}-z, & 1, & 1\\ 1, & -z, & 1\\ 1, & 1, & -z\end{vmatrix};$$

或
$$\Delta(z)=-z(z^2-1)+2(z+1)=(z+1)(-z^2+z+2)$$

我們所求的第一個函數爲：

$$x_1=\sum_{R}\frac{\begin{vmatrix}-C_1, & 1, & 1\\ -C_2, & -z, & 1\\ -C_3, & 1, & -z\end{vmatrix}}{(z+1)(-z^2+z+2)}e^{tz},$$

或將行列式展開並且消去$(1+z)$：

$$x_1=\sum_{R}\frac{C_1(1-z)-C_2-C_3}{-z^2+z+2}e^{tz}。$$

上式右邊分數的分母有兩個零點 $z=-1$ 和 $z=+2$，用通常的規則來決定在這些點的留數：分子被除於分母的導數，得：

$$x_1=\left(\frac{2}{3}C_1-\frac{1}{3}C_2-\frac{1}{3}C_3\right)e^{-t}+\left(\frac{1}{3}C_1+\frac{1}{3}C_2+\frac{1}{3}C_3\right)e^{2t}。$$

注意：多項式 $\Delta(z)$ 以 $z=-1$ 爲二重零點，但在上式中 e^{-t} 的乘數不是 t 的一次多項式而是常數。

對於非齊次方程組（強迫振動）：

$$x_s'=a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n+f_s(t),\qquad (s=1,2,\cdots,n)\tag{60}$$

其中 $f_s(t)$ 是 t 的已知函數，應該找尋形式爲：

$$x_s=-\sum_{R}\frac{C_1(t)A_{1s}(z)+\cdots+C_n(t)A_{ns}(z)}{\Delta(z)}e^{tz}\tag{61}$$

的解，其中 $A_{ks}(z)$ 是行列式 $\Delta(z)$ 的元素的代數餘因子，$C_k(t)$ 是待定的 t 的函數（改變任意常數法）[II,25]。將(61)式代入(60)式，並注意當 C_k 爲任意常數時(61)式是齊次方程組的解，可得導數 $C_k'(t)$ 的方程組：

$$-\sum_{R}\frac{C_1'(t)A_{1s}(z)+\cdots+C_n'(t)A_{ns}(z)}{\Delta(z)}e^{tz}=f_s(t)。(s=1,2,\cdots,n)\tag{62}$$

我們證明上面的方程組有下列一組的解：

$$C_1'(t)=e^{-tz}f_1(t);\cdots;C_n'(t)=e^{-tz}f_n(t)。\tag{63}$$

實際上，代入(62)式的左邊，得：

(64) $$-\sum_R \frac{f_1(t)A_{1s}(z)+\cdots+f_n(t)A_{ns}(z)}{\Delta(z)}。$$

若 $i\neq k$；則 a_{ik} 的代數餘因子 $A_{ik}(z)$ 中不含 $(a_{ii}-z)$ 及 $(a_{kk}-z)$ 兩元素，故 $A_{ik}(z)$ 爲 z 的 $n-2$ 次多項式。由前面輔助定理：

$$\sum_R \frac{A_{ik}(z)}{\Delta(z)}=0, \qquad (i\neq k)$$

因爲 $A_{ik}(z):\Delta(z)$ 在無限遠點鄰域中的展開式從 $\frac{a}{z^2}$ 項開始，故不含 z^{-1} 的項。

又 $(a_{ii}-z)$ 的代數餘因子 $A_{ii}(z)$ 是 $(n-1)$ 次多項式，最高次項爲 $(-1)^{n-1}z^{n-1}$，因此：

$$-\sum_R \frac{A_{ii}(z)}{\Delta(z)}=1,$$

由這兩式子可知(64)式等於 $f_s(t)$。又由(63)有：

$$C_k(t)=\int_0^t e^{-\tau z}f_k(\tau)d\tau, \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

這時我們如此選取積分常數，使得 $C_k(0)=0$（純強迫振動）。

代入(61)式，得：

(65) $$x_s=-\sum_R\int_0^t \frac{f_1(\tau)A_{1s}(z)+\cdots+f_n(\tau)A_{ns}(z)}{\Delta(z)}e^{(t-\tau)z}d\tau。$$

64. 分函數的最簡分數展開式 現在我們應用留數理論於函數的無窮級數展開問題。設 $f(z)$ 在全平面上爲單值正則，除了各別的孤立極點以外。這種函數通常稱爲分函數，或半純函數。有理分式即分函數的例子。函數 $\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}$ 是第二個例子，其極點卽 $\sin z$ 的零點。

上述第二個半純函數有無數個極點。注意：若半純函數有無數個極點，則平面中任一有界區域 B 祇包含有限個極點在其內。實際上，

如果這話不對,則在 B 中存在一點,他是 $f(z)$ 的極點的極限點。就是說,存在一點 $z=c$, 使得以 $z=c$ 爲中心,半徑任意小的圓中必定含有無數個 $f(z)$ 的極點。這點 $z=c$ 是 $f(z)$ 的奇異點,但不是極點,因爲由極點的定義[17]知道他應該是孤立奇異點。但是由假設 $f(z)$ 除了極點以外沒有別的奇異點,故有矛盾。既然平面中任一有界區域祇含 $f(z)$ 的有限個極點,所以常可將他們依照模的大小排列起來,設以 a_k 記這些極點,則有:

$$|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant|a_3|\leqslant\cdots,$$

當 $n\to\infty$ 時 $|a_n|\to+\infty$。在每一極點 $z=a_k$ 函數有一定的無限部分,他是 $\frac{1}{z-a_k}$ 的多項式,但不含零次項[17]。記這多項式爲:

$$G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)。\qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{66}$$

現在證明若對分函數 $f(z)$ 再加幾個假定,則 $f(z)$ 可以展開爲無窮級數,其一般項可藉無限部分(66)來表示。函數 $f(z)$ 應滿足的條件如下:設有一列環繞原點的閉線路 C_n, 其中任一 C_n 必在 C_{n+1} 的內部。設 C_n 的長爲 l_n, 和原點的最短距離爲 δ_n。又設 $\delta_n\to\infty$, 卽當 n 無限增大時線路 C_n 向各方向無限擴張。此外,再設當 $n\to\infty$ 時 $l_n:\delta_n$ 爲有界,卽存在正數 m, 使

$$\frac{l_n}{\delta_n}\leqslant m。 \tag{67}$$

例如設 C_n 是以原點爲中心半徑等於 r_n 的圓周,則 $l_n=2\pi r_n$, $\delta_n=r_n$, 從而 $l_n:\delta_n=2\pi$。現在假定分函數 $f(z)$ 在所有線路 C_n 上的模爲有界,換句話說,存在正數 M, 使在任何線路 C_n 上成立不等式:

$$|f(z)|\leqslant M。\qquad (在\ C_n\ 上) \tag{68}$$

考察積分

(69) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(z')}{z'-z}dz',$$

這裏積分沿 C_n 上的正方向，z 是 C_n 內部異於 a_k 的點。假設函數 $f(z)$ 在 C_n 內部各極點 a_k 的無限部分之和爲：

(70) $$\omega_n(z)=\sum_{(C_n)}G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

其中 $\sum$ 下面的符號 (C_n) 表示祇關於 C_n 內部的諸極點相加。

積分(69)中的被積函數看成 z' 的函數時在 C_n 內部有單極點 $z'=z$，即分母的零點，和極點 $z'=a_k$，即 $f(z')$ 在 C_n 內部的極點。決定在極點 $z'=z$ 的留數的規則是：分子被除於分母的導數：

$$\frac{f(z')}{(z'-z)'}\bigg|_{z'=z}=\frac{f(z')}{1}\bigg|_{z'=z}=f(z)。$$

在極點 $z'=a_k$ 的留數等於函數

(71) $$\frac{\omega_n(z')}{z'-z}$$

在該點的留數。函數 $\omega_n(z')$ 可以表示爲分子次數低於分母次數的有理分式的和，且其全部極點都在 C_n 的內部。我們可以證明函數(71)在各極點 a_k 的留數之和爲：

(72) $$-\omega_n(z)=-\sum_{(C_n)}G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)。$$

實際上，函數(71)是 z' 的有理分式，其中分母的次數至少比分子的次數高兩次，因爲 $\omega_n(z')$ 已經是個分母次數高於分子次數的有理分式了。在 $z'=\infty$ 的鄰域中函數(71)有下面的展開式：

$$\frac{\omega_n(z')}{z'-z}=\frac{\alpha^2}{z'^2}+\frac{\alpha^3}{z'^3}+\cdots,$$

故函數(71)沿半徑甚大的圓周上的積分等於零，即這函數在其全部有限遠極點的留數的和等於零。但是他在 $z'=z$ 的留數顯然等於 $\omega_n(z)$，

因此他在其餘各極點 a_k 的留數的和等於 $-\omega_n(z)$，即(72)式是。應用留數的基本定理於積分(69),得:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(z')}{z'-z}dz'=f(z)-\sum_{(C_n)}G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)。$$

在這式子中置 $z=0$，並設 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的極點:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(z')}{z'}dz'=f(0)-\sum_{(C_n)}G_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)。$$

由前一等式減去這一等式,得:

$$(73)\quad \frac{z}{2\pi i}\int_{(C_n)}\frac{f(z')}{z'(z'-z)}dz'=f(z)-f(0)-\sum_{(C_n)}\left[G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-G_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)\right]。$$

現在再證上式左邊的積分當 n 無限增大時其極限爲零。實際上,由

$$|z'|\geqslant\delta_n,\quad |z'-z|\geqslant|z'|-|z|\geqslant\delta_n-|z|,$$

以及(68)式有: $$\left|\int_{C_n}\frac{f(z')}{z'(z'-z)}dz'\right|\leqslant\frac{Ml_n}{\delta_n(\delta_n-|z|)},$$

或由(67)有: $$\left|\int_{C_n}\frac{f(z')}{z'(z'-z)}dz'\right|<\frac{Mm}{\delta_n-|z|},$$

由此立刻可知積分的極限爲零,因爲 $\delta_n\to\infty$。這樣,將(73)式取極限可得:

$$f(z)-f(0)-\lim_{n\to\infty}\sum_{(C_n)}\left[G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-G_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)\right]=0$$

或

$$(74)\qquad f(z)=f(0)+\lim_{n\to\infty}\sum_{(C_n)}\left[G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-G_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)\right]。$$

當 n 無限增大時由假設線路 C_n 無限擴張,而 C_n 的內部就包含更多的極點 a_k，因此取極限時在(74)的右邊得到一個無窮級數,而(74)式就成爲 $f(z)$ 的無窮級數展開式:

$$(75)\qquad f(z)=f(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-G_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)\right]。$$

嚴格地說，因為(74)中的和是關於 C_n 而作，故對(75)式的無窮級數我們應該把對應於 C_n 和 C_{n+1} 之間的極點的那些 $G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-G_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)$ 先加在一起，然後再關於 n 相加。但是假如我們相信即使把所有這些無形的括弧都透開，所得的級數仍舊收斂，則顯然在(75)式中無窮級數可以看做關於 k 相加了。

條件(68)要求函數 $f(z)$ 在所有的閉線路 C_n 上的模為有界，如果我們用一個比較更廣的條件來替代(68)，即：$f(z)$ 的模隨 C_n 的擴大而增大，但不比 $|z^p|$ 的增大為快，其中 p 是個正整數，換句話說，在所有的 C_n 上成立不等式：

$$\left|\frac{f(z)}{z^p}\right|\leqslant M \qquad (\text{在 } C_n \text{ 上})$$

則代替(75)式而有下面的展開式：

$$(76)\quad f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}z+\cdots+\frac{f^{(p)}(0)}{p!}z^p+\sum_{k=1}^{\infty}\left[G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-\chi_k^{(p)}(z)\right],$$

其中 $\chi_k^{(p)}(z)$ 表示函數 $G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$ 的麥克勞林級數中的前$(p+1)$項。

65. 函數 $\operatorname{ctg} z$　考察分函數

$$(77)\qquad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}。$$

由尤拉公式：
$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

可知 $\sin z=0$ 和 $e^{2iz}=1$ 相話，這方程的根為 $z=k\pi\,(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$，即 $\sin z$ 祇有在三角學中早已知道的實零點。函數(77)的極點為：

$$(78)\qquad z=0,\ \pm\pi,\ \pm2\pi,\ \cdots$$

設 ρ 為一任意已給正數，對於(78)中每一點做一個以這點為圓心半徑等於 ρ 的圓 λ_0。藉這些圓之助可以從平面中除去(78)中所有的點。現在證明在除去這些圓的平面中函數

(77)的模爲有界。因爲這函數的週期爲 π，我們祇須看他在兩直線 $x=0$ 和 $x=\pi$ 之間的帶域 K 中的值就夠了(圖 63)，但在這帶域中以極點 $z=0$ 和 $z=\pi$ 爲中心半徑等於 ρ 的兩個半圓應該除去。在 K 的任何有限部分區域中函數(77)爲連續，當然亦爲有界。所以祇要證明當 z 在 K 中無限制地向上或向下走時函數(77)的模爲有界卽可。例如設 z 在 K 中向上接近於無限遠點，卽若 $z=x+iy$，則 $y\to+\infty$，而 x 在區間 $(0,\pi)$ 之中。我們有：

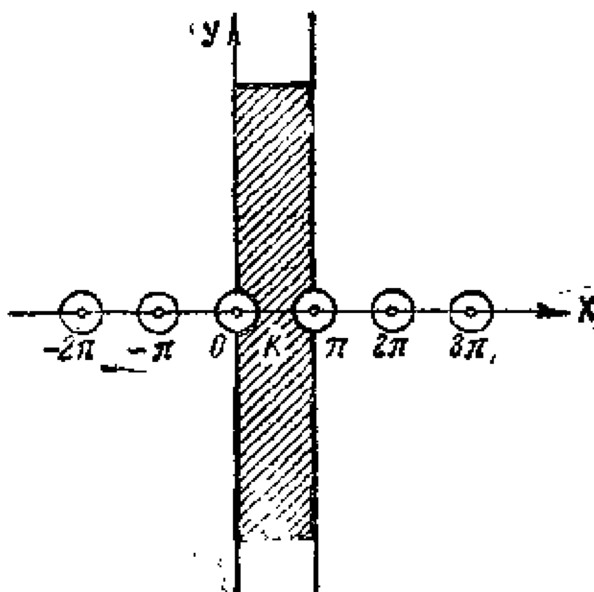


圖 63

$$\operatorname{ctg} z=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=i\frac{e^{ix}e^{-y}+e^{-ix}e^{y}}{e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}},$$

由此取分子中兩項的模的和代替分子的模，取分母中兩項的模的差代替分母的模，則得：

$$|\operatorname{ctg} z|\leqslant\frac{e^{y}+e^{-y}}{e^{y}-e^{-y}}=\frac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}}。$$

當 $y\to\infty$ 時上式右邊的極限爲 1，故當 y 甚大時我們可以得到例如下面的不等式：

$$|\operatorname{ctg} z|<1.5。$$

同樣可以證明函數(77)在 K 的下半部爲有界。

注意：以上的證法也適用於分函數

$$\frac{1}{\sin z},\tag{79}$$

他有和函數(77)相同的極點，但是週期爲 2π。如果我們從平面中用相同的任意小半徑作圓除去這些極點以後，函數(79)的模在餘下的部分中卽爲有界。

回到函數(77)，取 C_n 爲以原點爲中心半徑等於 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 的圓周。這種圓周滿足條件(67)。此外，取 ρ 甚小$\left(例如，小於 \frac{\pi}{2}\right)$可使圓周 C_n 不經過前述從平面中除去的那些圓 λ_ρ，因此在所有這些圓周 C_n 上函數(77)的模必爲有界。顯然這事實對於函數

$$f(z)=\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}\tag{80}$$

也成立，因爲當 $z\to\infty$ 時 $z^{-1}\to 0$。易知函數(80)不以 $z=0$ 爲極點，故可將這函數依(75)式展開。爲此必須決定函數(77)在極點 $z=k\pi$ 的無限部分。每一極點必爲 $\sin z$ 的一重零點，故在該極點的留數可依通常的公式計算：

$$r_k=\frac{\cos z}{(\sin z)'}\bigg|_{z=k\pi}=1。$$

因此函數(77)在極點 $z=k\pi$ 的無限部分是:

$$\frac{1}{z-k\pi}。\qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

特別,在極點 $z=0$ 的無限部分為 z^{-1}, 故知函數(80)確乎不以 $z=0$ 為極點。至於在其他極點 $z=k\pi$, 則函數(80)的無限部分就等於(77)的無限部分。要應用公式(75)還須計算 $f(0)$ 。奇函數(80)在 $z=0$ 附近的展開式如:

$$f(z)=\gamma_1 z+\gamma_3 z^3+\cdots,$$

由此可得 $f(0)=0$ 。所以應用公式(75)的結果可得:

$$(81)\qquad \operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right),$$

其中 Σ 右上角的小撇表示這無窮級數中沒有對應於 $k=0$ 的項。

易證上式右邊的級數在平面中任何有界區域內為絕對且一致收斂,祇要除去有限個在這區域內有極點的項。實際上,這級數的一般項是

$$\frac{z}{(z-k\pi)k\pi}。$$

在任何有界平面區域中常存在 M 使 $|z|<M$, 又設 k 的絕對值甚大,則可寫:

$$\left|\frac{z}{(z-k\pi)k\pi}\right|\leqslant\frac{1}{k^2}\frac{M}{\pi(\pi-Mk^{-1})}。$$

當 k 無限增大時上式右邊 $\frac{1}{k^2}$ 的係數以有限數 $\frac{M}{\pi^2}$ 為極限,而級數

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{k^2}$$

顯為收斂,故由[I, 147],級數(81)在任何有界平面區域中為絕對且一致收斂。

若在(81)式中改 z 為 πz, 則這公式可以改寫為:

$$(81_1)\qquad \pi\operatorname{ctg}\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z-k}+\frac{1}{k}\right)。$$

在這級數中有對應於整數 k 的項,也有對應於整數 $-k$ 的項,我們把這樣的兩項加在一起,則上式可以改寫為:

$$\pi\operatorname{ctg}\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-k^2}。$$

用完全相仿的方法可以證明下面的公式:

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}=\frac{1}{z}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'(-1)^k\left(\frac{1}{z-k}+\frac{1}{k}\right)。$$

微分一致收斂級數(81),可得公式:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z-k)^2}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-k)^2}。$$

注意：我們曾經在三角級數論[II，145]中用另外的方法證明過上面這些公式。

65．半純函數的建造　假設已知一半純函數的極點 a_k 和函數在這些極點的無限部分

$$g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right), \quad (k=1, 2, \cdots) \tag{82}$$

現在要研究如何來決定這半純函數的問題。若所給的極點祇有有限個，設爲 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，則函數

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{n} g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

顯然就是我們所求的，這時他是有理分式。現在假設已給的是無限多個極點 a_k 和對應的無限部分。如[64]所證，在任何有界平面區域中祇有有限個極點，因此可以把他們依模的大小排列成序：

$$|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \cdots \quad (|a_n| \to +\infty)$$

除了假設 $z=0$ 不是函數的極點外，對於極點的分佈和函數在極點的無限部分再沒有旁的限制了。

每一無限部分(82)是圓 $|z|<|a_k|$ 內部的正則函數，故在這圓中可依麥克勞林級數展開：

$$g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)=a_0^{(k)}+a_1^{(k)}z+a_2^{(k)}z^2+\cdots。\quad (|z|<|a_k|) \tag{83}$$

取一列的正數 ε_k，使得級數：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \tag{84}$$

爲收斂。

因爲冪級數(83)在圓

$$|z| \leqslant \frac{1}{2}|a_k|$$

中爲一致收斂[13]，我們可以取其部分和

$$q_k(z)=a_0^{(k)}+a_1^{(k)}z+a_2^{(k)}z^2+\cdots+a_{m_k}^{(k)}z^{m_k}，$$

使得在圓 $|z| \leqslant \frac{1}{2}|a_k|$ 中

$$\left|g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k(z)\right|<\varepsilon_k。 \tag{85}$$

故級數

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k(z)\right], \tag{86}$$

並考察以原點爲中心半徑等於 R 的圓 C_R。因爲 $|a_k|\to+\infty$，故存在 N，使當 $k>N$ 時 $R\leqslant\frac{1}{2}|a_k|$。對於這種 k(85) 式中的估計在圓 C_R 內成立，又因級數(84)收斂，故級數(86)在 C_R 內爲絕對且一致收斂，假如去了這級數中前面 N 項不要的話。這些前面的項在圓 C_R 內有極點 a_k 和對應的無限部分 (82)。又在 C_R 內絕對且一致收斂的級數定義該圓內一正則函數。因爲半徑 R 可以任意大，我們知道(86)式就是所求的半純函數。注意：以上對於多項式 $q_k(z)$ 並沒有加任何限制。

又若 $z=0$ 也是極點，在這點函數的無限部分爲：

$$g_0\left(\frac{1}{z}\right),$$

則祇須把這無限部分加到級數 (86) 上去就行了。上述的解法由瑞典數學家米他格李佛所創。

在 [65] 中講過滿足某種附加條件的半純函數的最簡分數展開式，現在我們講在一般情形下類似的公式。

設 $f(z)$ 爲半純函數。應用上面的方法可以做一個半純函數 $\varphi(z)$，他有和 $f(z)$ 相同的極點以及在極點的無限部分。這半純函數 $\varphi(z)$ 可用形式如 (86) 的級數表之。二函數之差 $f(z)-\varphi(z)$ 顯然在全平面爲正則，除了 $z=\infty$ 以外。這種函數稱爲整函數。他可以在全平面上用麥克勞林級數來表示。記

$$f(z)-\varphi(z)=F(z),$$

可得半純函數 $f(z)$ 的表示式如下：

$$f(z)=F(z)+g_0\left(\frac{1}{z}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k(z)\right], \tag{87}$$

其中 $F(z)$ 是個整函數。(87)式較具理論上的趣味，而(75)式和(76)式則便於實際應用。若設 $F(z)$ 爲任意的整函數，則(87)式表示具有已知的極點和無限部分的一般半純函數。

67. 整函數 如上節所說整函數是全平面爲正則的函數。他可以在全平面上用麥克勞林級數來表示。若這級數中斷了，則函數就成爲多項式。否則的話，無限遠點是函數的本性奇異點，這時也稱爲超越整函數。e^z 和 $\sin z$ 就是超越整函數之例，以後我們簡稱整函數。

我們知道任一多項式必有零點，但整函數未必具有這性質，例如 e^z 卽無零點。無零點的整函數的一般形式可以這樣求：設 $g(z)$ 是整函數，則函數

$$f(z)=e^{g(z)} \tag{88}$$

顯然也是整函數，並且沒有零點。反過來可以證明任一沒有零點的整函數必定具(88)的形式，其中 $g(z)$ 為整函數。所以當 $g(z)$ 表示任意的整函數時(88)式表示一般的無零點整函數。

當整函數 $f(z)$ 沒有零點時，則函數

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

也是整函數，把他積分，仍得整函數

$$g(z)=\int\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\lg f(z)。$$

由此可知 $f(z)$ 具(88)的形式。

現在假設整函數 $f(z)$ 有有限個零點，但其中不含 $z=0$：

$$z=a_1, a_2, \cdots, a_m,$$

其中 n 重零點作 n 個零點算。比率

$$f(z):\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)$$

顯然是沒有零點的整函數，其中符號 $\prod\limits_{k=1}^{m}$ 表示對應於 k 從 1 到 m 的 m 個因子乘在一起。所以這整函數有如(88)的形式。從而函數 $f(z)$ 就可表示為：

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z}{a_k}\right), \tag{89}$$

其中 $g(z)$ 是一整函數。

以上我們假設 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的零點。如果 $z=0$ 是 p 重零點，則顯然可以下式代替公式(89)：

$$f(z)=e^{g(z)}z^p\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)。 \tag{90}$$

最有趣的情形是當 $f(z)$ 有無數多個零點的時候，這時我們不能立

刻應用公式(90)，因爲等式右邊將會出現無窮乘積，他可能是沒有意義的。要使得這無窮乘積爲收斂，應該在每一因子$\left(1-\frac{z}{a_k}\right)$後面附加一個指數型的乘數，他不會引進新的零點，但卻可使無窮乘積收斂。

例如對函數 $\sin z$ 的情形便是。由公式(81)有：

$$\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right)。$$

等式兩邊在 $z=0$ 點同爲正則，故可將這無窮級數逐項積分，從 $z=0$ 到變動點 z，卽得：

$$\lg\frac{\sin z}{z}\Big|_{z=0}^{z=z}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left[\lg(z-k\pi)+\frac{z}{k\pi}\right]_{z=0}^{z=z},$$

或取在原點鄰域中對數的主値：

$$\lg\frac{\sin z}{z}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left[\lg\left(1-\frac{z}{k\pi}\right)+\frac{z}{k\pi}\right]。$$

由此去對數卽得函數 $\sin z$ 的無窮乘積表示式：

(91)
$$\sin z=z\prod_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{k\pi}\right)e^{\frac{z}{k\pi}},$$

其中乘積符號右上角的一撇表示乘積中沒有對應於 $k=0$ 的因子。上式中指數型乘數 $e^{\frac{z}{k\pi}}$ 保證無窮乘積的收斂。

把(91)式中對應於 k 和 $-k$ 的因子兩兩相併，卽得：

(92)
$$\sin z=z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)。$$

改 z 爲 πz，上式可寫成下面的形式：

(93)
$$\frac{\sin\pi z}{\pi}=z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)。$$

要更詳細地解釋整函數展開爲無窮乘積的問題，我們應先說明關於無窮乘積的幾件基本事實。

68. 無窮乘積　考察無窮乘積

(94)
$$\prod_{k=1}^{\infty}c_k=c_1c_2\cdots,$$

其中 c_k 是不等於零的複數。乘積(94)的收斂概念和級數的收斂概念相仿。作有限乘積：

(95)
$$P_n=\prod_{k=1}^{n}c_k=c_1c_2\cdots c_n。$$

若當 $n\to\infty$ 時乘積 P_n 有不等於零的有限極限値 P，則稱無窮乘

積(94)爲收斂,而 P 稱爲無窮乘積的值。

若諸 c_k 中有等於零的,但除去等於零的因子以後,餘下的無窮乘積依上述意義爲收斂,則無窮乘積(94)仍稱爲收斂,其值爲零。在上述無窮乘積的定義中規定 P_n 的極限值 P 不等於零,目的是要使收斂無窮乘積和有限乘積同具一個重要的性質,就是:當且僅當有零因子時乘積纔等於零。

現在假設乘積(94)中沒有零因子,作無窮級數:

(96) $$\sum_{k=1}^{\infty} \lg c_k,$$

這裏每一項中對數的值可隨意取定。級數(96)前 n 項之和爲:

(97) $$S_n=\sum_{k=1}^{n} \lg c_k。$$

假設對於某種對數值的選取級數(96)爲收斂,即存在極限 $S_n \to S$。由公式(95)有 $P_n=e^{S_n}$,因此存在極限 $P_n \to e^S \neq 0$,即由級數(96)的收斂性可以導出乘積(94)爲收斂。現在反過來假設無窮乘積(94)爲收斂,即存在極限 $P_n \to P \neq 0$。如此選取級數(96)中每項的對數值,使得在(97)式的右邊常常得到乘積 $c_1c_2\cdots c_n$ 的對數主值:

$$S_n=\lg|c_1c_2\cdots c_n|+i\arg(c_1c_2\cdots c_n),$$

其中 $$-\pi<\arg(c_1c_2\cdots c_n)\leqslant\pi。$$

易知 S_n 也有一定的極限值,即

$$\lim S_n=\lg|P|+i\arg P=\lg P,$$

從而級數(96)就收斂。

以上我們假設 P 不是負實數,因此 $\arg P$ 在區間 $(-\pi,+\pi)$ 內部。當 P 是負實數時可以如此選取 c_k 的輻角,使得 $\arg(c_1c_2\cdots c_n)$ 常在區間 $(0,2\pi)$ 之內。證明如前。

因此我們就得到下面的一般結果:若所有的 c_k 都不等於零,則無

窮乘積(94)為收斂的充要條件是：對於某一種對數值的取法級數(96)為收斂；這時無窮乘積的值是

$$P=e^{S}。\tag{98}$$

級數(96)的一般項是：

$$\lg c_k=\lg|c_k|+i\arg c_k,$$

因為收斂級數的一般項應以零為極限，故在任何情形之下應該有 $\arg c_k\to 0$，就是說，祇有從某一項開始就取對數的主值，級數(96)纔有收斂的可能。至於前面有限項中對數值如何取法，實際上並不影響級數的收斂性，因若不取主值，所加於級數(96)的祇是一個形式為 $2m\pi i$ 的項，m 是整數。由(98)式 S 的值增加了這一項時並不影響 P 的數值。總之，我們應該從某個一定然而是任意的項開始取對數的主值。

現在再看以 z 的整函數為項的無窮乘積：

$$F(z)=\prod_{k=1}^{\infty}u_k(z)=u_1(z)\cdot u_2(z)\cdots\tag{99}$$

在 z 平面上取一個以原點為心半徑等於 R 的圓 C_R。假設當 R 任意選定後，從某一個 k 開始 $u_k(z)$ 在圓 C_R 中沒有零點。對已給的 R，為確定起見，假設從 $k=k_0$ 開始 $u_k(z)$ 在圓 C_R 中沒有零點，(一般而論，k_0 與 R 有關)。考察無窮級數

$$S(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lg u_k(z)。\tag{100}$$

這式也可改寫為：

$$\sum_{k=1}^{k_0-1}\lg u_k(z)+\sum_{k=k_0}^{\infty}\lg u_k(z)。\tag{101}$$

後一級數的每一項是圓 C_R 中的正則單值函數，因為 $u_k(z)$ 在這圓中沒有零點。假設對於正則函數 $\lg u_k(z)$ 的某種取值法這級數在圓 C_R 中一致收斂。記其和為 $f_{k_0}(z)$，則 $f_{k_0}(z)$ 是正則函數[12]，我們有：

$$\prod_{k=1}^{\infty} u_k(z) = e^{f_{k_0}(z)} \prod_{k=1}^{k_0-1} u_k(z),$$

就是說，這時函數(99)在圓 C_R 內爲正則，他在這圓中的零點卽諸項 $u_k(z)$，$k<k_0$，的零點。因爲 R 是任意取的，故知當級數(100)在任何有界平面區域中爲一致收斂時(除了前面有限項以外)無窮乘積(99)在全平面爲收斂，其值爲一整函數，這整函數的零點由其因子 $u_k(z)$ 的零點完全決定。

微分一致收斂級數(100)，得：

$$S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k'(z)}{u_k(z)},$$

但
$$F(z) = e^{S(z)} \text{ 又 } F'(z) = S'(z)F(z),$$

所以

$$F'(z) = F(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k'(z)}{u_k(z)}. \tag{102}$$

這公式說明當級數(100)爲一致收斂時對於無窮乘積(99)有和有限乘積相似的微分規則(102)。

69. 由零點決定整函數 利用上節的知識我們可以由一個整函數的零點來決定該函數。首先注意整函數的零點不能有有限遠極限點。若存在這種點 $z=c$，卽在以 $z=c$ 爲心任意小的圓中存在函數的無數多個零點，則這函數應恆等於零[18]。仿照[64]可以把整函數的零點 a_k 依其模的大小排列成序：

$$|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \cdots,$$

當 $n\to\infty$ 時 $|a_n|\to+\infty$，如果在 a_k 之中複數 a 出現 q 次，則 a 是函數的 q 重零點。我們暫且假定 $z=0$ 不是函數的零點。

我們現在祇看一個在應用上最爲重要的特別情形，卽設 a_k 趨於無窮如此之快，使得有正整數 m 存在，令級數

(103) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^m}$$

爲收斂，且設 $m\geqslant 2$。

作無窮乘積：

(104) $$F(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m-1}}$$

我們要證明他滿足上節所述各條件。對某一圓 C_R 存在 k_0，使得從 $k=k_0$ 開始所有的 a_k 都在圓 C_R 以外，即當 $k\geqslant k_0$ 時乘積(104)的因子在圓 C_R 內沒有零點，故對 C_R 中任一 z 有：

(105) $$\left|\frac{z}{a_k}\right|<\theta<1, \qquad (k\geqslant k_0)$$

這裏 θ 是個小於 1 的固定正數。現在級數(100)的形式爲：

(106) $$\sum_{k=k_0}^{\infty}\lg\left[\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m-1}}\right]。$$

因爲(105)式的關係我們可以把對數函數展開爲冪級數而將(106)式改寫爲：

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\left[\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m-1}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}\left(\frac{z}{a_k}\right)^s\right]=$$

$$=\sum_{k=k_0}^{\infty}\left[-\frac{1}{m}\left(\frac{z}{a_k}\right)^m-\frac{1}{m+1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m+1}-\cdots\right]。$$

研究這級數的一般項：

$$v_k(z)=-\frac{1}{m}\left(\frac{z}{a_k}\right)^m-\frac{1}{m+1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m+1}-\cdots$$

我們顯然有：

$$|v_k(z)|\leqslant\frac{1}{m}\left|\frac{z}{a_k}\right|^m+\frac{1}{m+1}\left|\frac{z}{a_k}\right|^{m+1}+\cdots$$

把 $\frac{1}{m}\left|\frac{z}{a_k}\right|^m$ 拿到括弧外面來，再應用(105)式及在 C_R 中 $|z|\leqslant R$ 的關

係,可得:

$$|v_k(z)| \leqslant \frac{R^m}{m|a_k|^m}(1+\theta+\theta^2+\cdots),$$

即

$$|v_k(z)| \leqslant \frac{R^m}{m(1-\theta)} \frac{1}{|a_k|^m}。$$

因級數(103)爲收斂,以上式右邊的正數做一般項的級數也收斂,從而級數(106)在圓 C_R 內爲絕對且一致收斂。由此可知乘積(104)表示一個整函數,這整函數的零點卽其因子的零點 a_k。

若有一整函數 $f(z)$ 以 a_k 爲零點,則 $f(z)$: $F(z)$ 是沒有零點的整函數,卽其形式爲 $e^{g(z)}$,從而函數 $f(z)$ 的表示式就是:

$$(107) \qquad f(z)=e^{g(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m-1}}$$

其中 $g(z)$ 是整函數。以上我們都假設 $z=0$ 不是函數的零點。如果 $z=0$ 是 p 重零點的話,則在公式(104)和(107)的右邊應該再乘上一個因子 z^p。

今以函數 $\sin z$ 爲例。他有單零點 $z=0$ 和 $z=k\pi(k=\pm1, \pm2, \cdots)$。

現在 $m=2$,因爲級數

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{|k\pi|^2}$$

已知爲收斂。引用公式(107)再乘上因子 z,卽得:

$$\sin z=e^{g(z)}z\prod_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{k\pi}\right)e^{\frac{z}{k\pi}}。$$

當然,整函數 $g(z)$ 不能由上述一般論證來決定。但 [65] 中的結果告訴我們這函數恆等於零。

注意:若 $m=1$,卽級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|}$$

爲收斂,則如前可得和(107)式相當的公式:

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right),$$

以後還有要應用公式(104)的例子。這公式普通稱爲維爾史特拉司無窮乘積。

有時會遇到一種情形,即當 a_k 已給時,對於任何正整數 m 級數 (103) 常爲發散。例如當 $a_k=\lg(k+1)$, $(k=1,2,\cdots)$ 時就是。實際上,以 $[\lg(k+1)]^{-m}$ 爲一般項的級數對任何正數 m 爲發散,因這級數前面 k 項之和大於

$$\frac{k}{[\lg(k+1)]^m},$$

用洛畢達定則 [I, 66] 不難證明當 $k\to\infty$ 時上式的極限爲無窮。當級數 (103) 對任何正整數 m 爲發散時我們做無窮乘積:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{Q_k(z)}, \tag{108}$$

其中
$$Q_k(z)=\frac{z}{a_k}+\frac{z^2}{2a_k^2}+\cdots+\frac{z^{m_k}}{m_k a_k^{m_k}}$$

m_k 與 k 有關。仿照前面一樣的估計可證要使無窮乘積 (108) 收斂只須對於所有的 $R>0$ 級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{m_k+1}$$

爲收斂。爲這目的只須取 $m_k=k-1$。實際上,對級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{k}$$

引用勾犀判定法 [I, 121],得到:

$$\sqrt[k]{\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^k}=\frac{R}{|a_k|}\to 0,$$

因此級數確爲收斂。可以證明要使級數收斂只須取 m_k 使滿足不等式 $m_k+1>\lg k$ 就夠了。

70. 含參變數的積分 以後我們要遇到一種由含有參變數的積分所定義的函數。這在 [61] 中已經見過。在實變數的情形我們已研究過這種函數,找出使他有導數的條件,並且使得微分可以在積分符號之內施行 [II, 84]。

現在研究在複變數函數論中類似的問題。

定理 設 $f(t,z)$ 爲兩個變數 t 和 z 的連續函數,當 z 屬於以 l 爲境界線的閉區域 B, t 屬於實軸上的有限區間 $a\leqslant t\leqslant b$ 時。又設對於上述區間中任何的 t, $f(t,z)$ 是 z 在閉區域 B 中的正則函數。則由等式:

(109) $$\omega(z)=\int_a^b f(t, z)dt$$

所定義的函數 $\omega(z)$ 在 B 內部爲正則，並且在計算他的導數時可以把微分移到積分符號以內去，即

(109₁) $$\omega'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt。$$

由勾犀公式可寫：

$$f(t, z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(t, z')}{z'-z}dz',$$

其中 z 在 B 之內，t 是區間 $a\leqslant t\leqslant b$ 中任意一點。因此：

$$\omega(z)=\int_a^b\left[\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(t,z')}{z'-z}dz'\right]dt。$$

對連續函數的積分我們可以變更積分的次序[II,78,97]：

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\int_a^b f(t,z')dt}{z'-z}dz'。$$

這公式將 $\omega(z)$ 表示成勾犀型積分的形式，故 $\omega(z)$ 爲 B 內部的正則函數，其導數由下式決定之[8]：

$$\omega'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\int_a^b f(t,z')dt}{(z'-z)^2}dz'。$$

再變換積分的次序，可得：

$$\omega'(z)=\int_a^b\left[\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(t,z')}{(z'-z)^2}dz'\right]dt。$$

由勾犀公式，上式括弧中的積分就是導數 $\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}$，因此這式子就是(109₁)，而定理即得證明。注意：我們可以假設 t 不在實軸上的有限區間 (a,b) 中變動，而是沿任意有限曲線變動。證明如前不變。由以上的證明可知在勾犀積分的分子中的積分

$$\int_a^b f(t,z')dt$$

是 z' 在 l 上的連續函數，他表示 $\omega(z')$。實際上，由假設 $f(t,z)$ 是兩個變數 t 和 z 的連續函數立刻可知[II,80]這事實的成立。

現在再來看廣義積分。要證明和前面相似的定理祇須再設積分(109)爲一致收斂。爲確定起見我們祇看在無限區間$(a,+\infty)$上的積分，但是證明卻適用於其他形式的廣義積分。

定理　設 $f(t,z)$ 是兩個變數 z 和 t 的連續函數，當 z 屬於閉區域 B 及 $t\geqslant a$ 時。又設對於任何的 $t\geqslant a$，$f(t,z)$是 z 在閉區域 B 中的正則函數，又積分

$$\int_a^\infty f(t,z)dt$$

關於閉區域 B 中的 z 爲一致收斂。則

$$\omega(z)=\int_a^\infty f(t,z)dt \tag{110}$$

是 B 內部的正則函數，且

$$\omega'(z)=\int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt。$$

做一列的函數

$$\omega_n(z)=\int_a^{a_n} f(t,z)dt,$$

其中 a_n 是任意大於 a 而趨於$(+\infty)$的數列。由前一定理知 $\omega_n(z)$ 是 B 內部的正則函數且

$$\omega_n'(z)=\int_a^{a_n} \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt。$$

由假設積分(110)爲一致收斂，故 $\omega_n(z)$ 一致收斂於(110)式所定義的函數 $\omega(z)$，又由維爾史特拉司定理知 $\omega(z)$ 是 B 內部的正則函數且

$\omega_n'(z)\to\omega'(z)$，卽

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{a_n}\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt=\omega'(z),$$

當 a_n 以任何方式趨於$(+\infty)$。由此有：

$$\omega'(z)=\int_a^\infty\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt,$$

其中等式右邊的積分確有意義。定理證明完畢。

在這定理的證明中我們也可假設關於 t 的積分是沿着某一無限線路 C，這種廣義積分應當了解作沿 C 的有限部分線路的積分的極限。對於另一種廣義積分，其被積分函數 $f(t,z)$ 當 $t\to a$ 時趨於無窮的，有和這定理完全類似的定理。

最後，我們注意對於複函數也成立下面的定理，他給了一個積分爲絕對且一致收斂的充分條件 [II,82]：假設關於 t 的積分沿着實軸進行，又當 $t\geqslant a$ 及 z 在閉區域 B 中時不等式 $|f(t,z)|\leqslant\varphi(t)$ 成立，且積分

$$\int_a^\infty\varphi(t)dt$$

爲收斂，則積分 (110) 爲絕對且一致收斂。絕對收斂性和當 $f(z,t)$ 是實函數時一樣定義。

71．第二類尤拉積分　考察由第二類尤拉積分所定義的函數：

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\tag{111}$$

其中 $t^{z-1}=e^{(z-1)\lg t}$，又正數 t 的對數值應取實數。寫這積分爲兩部分：

$$\Gamma(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.\tag{112}$$

先看右邊第二項：

$$\omega(z)=\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.\tag{113}$$

當 $t\geqslant 1$ 時被積函數

(114) $$e^{-t}t^{z-1}=e^{-t+(z-1)\lg t}$$

是 t 和 z 的連續函數，對於任意的 z；且對任何 $t\geqslant 1$ 他是 z 的整函數。假設 z 屬於 z 平面上某一有界區域 B，置 $z=x+iy$，以 x_0 記橫坐標 x 在閉區域 B 中的最大值。當 $t\geqslant 1$ 時 $\lg t\geqslant 0$，又當 φ 為實數時 $|e^{\varphi i}|=1$，故當 z 屬於 B 時有

$$\left|e^{-t}t^{z-1}\right|=\left|e^{-t+(x-1)\lg t+iy\lg t}\right|\leqslant e^{-t+(x_0-1)\lg t}=e^{-t}t^{x_0-1}。$$

積分 $$\int_1^{\infty}e^{-t}t^{x_0-1}dt$$

顯為收斂 [II,82]，因此積分(113)關於 B 中之 z 為一致收斂。因 B 是任意的，由上節第二定理可知由(113)式所定義的函數 $\omega(z)$ 是整函數；且可在積分符號之內關於 z 微分。

現在再看(112)式的第一項：

(115) $$\varphi(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt,$$

其中被積函數(114)當 $t=0$ 時可能有不連續點，因為當 $t=0$ 時 $\lg t=-\infty$。如前，函數(114)的模為：

$$e^{-t}t^{x-1},$$

若 $x>1$，則 $t=0$ 不是被積函數的不連續點，應用上節第一定理可證函數(115)當 $x>1$ 時為正則函數，即在直線 $x=1$ 的右邊為正則函數。現在我們證明他在虛軸的右邊為正則。實際上，任取位於虛軸右邊的一個有界區域 B。設 x_1 為閉區域 B 中點的橫坐標的最小值。若閉區域 B 在虛軸的右邊，則 $x_1>0$。當 $t\leqslant 1$ 時 $\lg t\leqslant 0$，故當 z 屬於 B 時，

$$\left|e^{-t}t^{z-1}\right|\leqslant e^{-t}t^{x_1-1},$$

但是 $x_1>0$ 時積分 $$\int_0^1 e^{-t}t^{x_1-1}dt$$

收斂,因此如前可知函數(115)在虛軸右邊爲正則,且可在積分符號之內關於 z 微分。合併這兩結果,可知公式(111)定義虛軸右邊的正則函數 $\Gamma(z)$。

我們現在要把 $\Gamma(z)$ 解析延拓到虛軸左邊去,然後證明他是半純函數,以

$$z=0,-1,-2,\cdots \tag{116}$$

爲單極點。因爲(112)式的第二項是整函數,我們只須研究函數(115)。

函數 e^{-t} 在有限區間 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上可展開爲一致收斂級數:

$$e^{-t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!},$$

其中依照常規設 $0!=1$。以 t^{z-1} 乘上式兩邊,然後在區間(0,1)上逐項積分,得:

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{t^{n+z}}{n+z}\right]_{t=0}^{t=1}。$$

我們假設 z 位於虛軸的右邊,故 $(n+z)$ 的實數部分爲正,當 $t=0$ 時有 $t^{n+z}=0$,卽

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}。$$

這樣,在虛軸的右邊 $\Gamma(z)$ 可表示如下:

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{z+n}+\int_1^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt。\tag{117}$$

上式右邊無窮級數的一般項的分母中有 $n!$,因此這級數在任何有界平面區域中爲絕對且一致收斂,如果除去其中有限個在這區域中有極點的項不要的話。所以這無窮級數定義一半純函數,以(116)各點爲單極點,且在極點 $z=-n$ 的留數等於 $\frac{(-1)^n}{n!}$。又(117)式右邊第二項已知爲整函數。這樣,公式(111)祇在虛軸右邊所定義的函數 $\Gamma(z)$ 就

被公式(117)解析延拓到全部 z 平面上去,使 $\Gamma(z)$ 成為一個半純函數,以(116)各點為單極點,且在極點 $z=-n$ 的留數等於 $\frac{(-1)^n}{n!}$。當 z 為正整數時 $\Gamma(z)$ 的值容易知道。設 $z=n+1$, n 為正整數,則由[II,81]有:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^n dt=n!$$

及
$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1。$$

所以當 z 為正整數時 $\Gamma(z)$ 的值就是整數的階乘:

(118) $$\Gamma(1)=1;\ \Gamma(n+1)=n! \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

現在再說明函數 $\Gamma(z)$ 的幾個基本性質。設 $z>0$, 並行分部積分,可得:

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^z dt=\Big[-e^{-t}t^z\Big]_{t=0}^{t=\infty}+z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,$$

即

(119) $$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)。$$

我們祇在正實軸上證明了這等式。但若兩個解析函數在某一曲線上全同,則必處處全同[18],因此知道(119)式對於所有的 z 都成立。設 n 為正整數,連續應用(119)式可得更一般的等式:

(120) $$\Gamma(z+n)=(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z\Gamma(z),$$

這式子也對於所有的 z 都成立。

現在假設 z 是在實軸上綫段(0,1)的內部。回到(111)式,且藉 $t=u^2$ 引進另一積分變數 u 以代 t, 則得:

$$\Gamma(z)=2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2z-1}du。$$

改 z 為 $1-z$, 可寫:

$$\Gamma(1-z)=2\int_0^{\infty}e^{-v^2}v^{1-2z}\,dv\text{。}$$

將這兩式相乘，得：

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1}du\,dv\text{。}\tag{121}$$

上式右邊的積分可以看做(u,v)平面上的二重積分，其積分區域爲第一象限，卽平面中 $u>0$ 和 $v>0$ 的區域。在(u,v)平面中引進極坐標

$$u=\rho\cos\varphi;\quad v=\rho\sin\varphi\text{。}$$

(121)式可以改寫爲：

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\rho^2}\operatorname{ctg}^{2z-1}\varphi\rho\,d\rho\,d\varphi\text{，}$$

其中關於 ρ 的積分從 0 到 $+\infty$，關於 φ 從 0 到 $\frac{\pi}{2}$，卽

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}^{2z-1}\varphi\,d\varphi\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\text{。}$$

易見

$$\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho\,d\rho=\frac{1}{2},$$

從而

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}^{2z-1}\varphi\,d\varphi\text{。}$$

藉下式引進另一變數 x：

$$\varphi=\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{x};\quad d\varphi=\frac{-dx}{2\sqrt{x}(1+x)}\text{。}$$

以上的結果現在可改寫爲：

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^{\infty}\frac{x^{z-1}}{1+x}dx\text{。}$$

但我們已知右邊的積分等於 $\frac{\pi}{\sin\pi z}$ [62]，因此得到下面的公式：

(122) $$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}。$$

我們祇證明了當 z 屬於實軸上的線段 $(0,1)$ 時上式成立。但是應用解析延拓的原理可知這式子對於所有的 z 都成立。

當 z 爲任意實數時我們如要計算 $\Gamma(z)$ 的值，祇須利用公式(120)就可把問題化爲計算在線段 $(0,1)$ 中某一點 $\Gamma(z)$ 的數值。再由公式(122)我們祇須計算在線段 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ 中某一點 $\Gamma(z)$ 的值就行了。於(122)式中置 $z=\frac{1}{2}$，得：

(123) $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt=\sqrt{\pi}。$$

72. 第一類尤拉積分 第一類尤拉積分的形式如下：

(124) $$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

如在積分(111)中一樣，我們假設 p 和 q 的實數部分大於零，又

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}=e^{(p-1)\lg x+(q-1)\lg(1-x)},$$

其中對數取實值。

藉 $t=1-x$ 引進變數 t 以代 x，由(124)有：

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt,$$

即

(125) $$B(p,q)=B(q,p)。$$

還有一個公式說明函數 $B(p,q)$ 的基本性質。將(124)式右邊行分部積分，得：

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx=\left[\frac{x^p(1-x)^q}{p}\right]_{x=0}^{x=1}+\frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx。$$

由前面關於 p 和 q 的假設易見上式右邊積分以外的項等於零，因而得到函數 $B(p,q)$ 所應滿足的性質：

$$B(p,q+1)=\frac{q}{p}B(p+1,q)。 \tag{126}$$

現在再看函數 $B(p,q)$ 和函數(111)間的關係。利用和前節一樣的變換可寫乘積 $\Gamma(p)\,\Gamma(q)$ 爲：

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}u^{2p-1}v^{2q-1}du\,dv,$$

改用極坐標，有：

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q)=4\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho^{2(p+q)-1}d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi。$$

以另一變數 $t=\rho^2$ 代 ρ，可寫

$$\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho^{2(p+q)-1}\,d\rho=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{p+q-1}\,dt=\frac{1}{2}\Gamma(p+q),$$

因此 $$\Gamma(p)\,\Gamma(q)=2\,\Gamma(p+q)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi。$$

再引進變數 $x=\cos^2\varphi$ 代替 φ，上之關係變成：

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

由此可用函數 $\Gamma(z)$ 來表示函數 $B(p,q)$：

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}。 \tag{127}$$

73. 函數 $[\Gamma(z)]^{-1}$ 的無窮乘積表示　回到公式(111)，這是函數 $\Gamma(z)$ 的基本定義式。爲簡單起見設 $z>0$。我們知道乘數 e^{-t} 有下之極限表示[I,38]：

$$e^{-t}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n。$$

改區間 $(0,+\infty)$ 爲有限線段 $(0,n)$，可得積分：

(128) $$P_n(z)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt。$$

我們曾希望當 $n\to\infty$ 時上之積分以(111)式右邊的積分為極限。在這一節最後可以證明這事實，現在我們先用他導出一些推論來。

藉 $t=n\tau$ 引進變數 τ 以代 t，可將(128)式改寫為：

(129) $$P_n(z)=n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau。$$

假設 $n\to+\infty$ 時祇取正整數值，行分部積分，可得：

$$\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau=\left[\frac{1}{z}\tau^z(1-\tau)^n\right]_{\tau=0}^{\tau=1}+\frac{n}{z}\int_0^1(1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau,$$

因為積分出來的項等於零($z>0$)，故有：

$$\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau=\frac{n}{z}\int_0^1(1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau=\frac{n}{z(z+1)}\int_0^1(1-\tau)^{n-1}d\tau^{z+1}。$$

再行分部積分，如前一樣可得：

$$\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau=\frac{n(n-1)}{z(z+1)}\int_0^1(1-\tau)^{n-2}\tau^{z+1}d\tau,$$

一般，積分(129)可寫成：

$$n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau=\frac{1\cdot2\cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)}n^z。$$

當 $n\to\infty$ 時上式左邊的極限為 $\Gamma(z)$，所以

(130) $$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)}\cdot n^z$$

或

(131) $$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{1\cdot2\cdots n}n^{-z}。\qquad(n^{-z}=e^{-z\lg n})$$

將上式右邊乘除 $e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$，可得：

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\left\{e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\lg n\right)z}z\frac{z+1}{1}\frac{z+2}{2}\cdots\frac{z+n}{n}e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}\right\}$$

或

$$(132)\qquad \frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\left\{e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\lg n\right)z}z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right\}。$$

當整數 $n\to\infty$ 時上式中的有限乘積變爲無窮乘積

$$(133)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}。$$

這無窮乘積是依照維爾史特拉司無窮乘積建造的規則[69]做起來的，在我們的情形 $a_k=-k$，級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^m}$$

當 $m=2$ 時收斂。因此(132)式右邊最後的有限乘積趨於一定的有限極限值(133)。現在證明變數

$$(134)\qquad u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\lg n$$

也有一定的極限值。爲此祇須證明變數

$$(135)\qquad v_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\lg n=u_n-\frac{1}{n}$$

有有限極限值，則 u_n 亦必有同一極限值。考察等軸雙曲線 $y=\frac{1}{x}$ 在第一象限中的一支。當 $x=k$ 時 $y=\frac{1}{k}$。$\lg n$ 顯然表示雙曲線之下，OX 軸之上和兩直線 $x=1$ 與 $x=n$ 之間的面積。而

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

則表示許多底長爲 1 高度依次

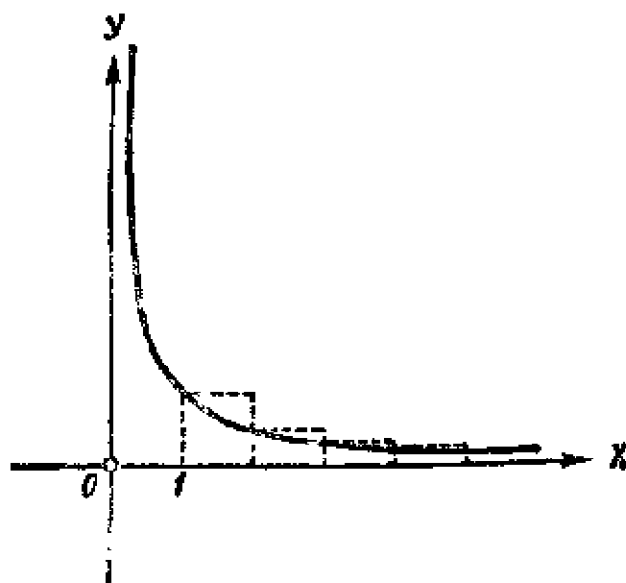


圖 64

為 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n-1}$ 的長方形面積之和，每一長方形必跨越雙曲線的兩邊，如圖 64 所示。由此可知差數(135)隨 n 增加而增加。但是另一方面，如果以相同的底而高度依次為 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}$ 作許多長方形，則他們都在 OX 之上雙曲線之下，這兩組長方形面積之差為

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n},$$

顯見差數(135)常小於差數 $1-\frac{1}{n}$。這樣 v_n 就是單調增加而有上界的變數，故必有極限值 C，我們通常稱 C 為尤拉常數。其值準確到小數第七位為：

$$C=0.5772157\cdots \tag{136}$$

最後由(132)式有：

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{Cz}z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}。\tag{137}$$

上式右邊是 z 的整函數，以 $z=0,-1,-2,\cdots$ 為單零點。公式(137)祇當 z 在正實軸上的時候已經證明了，但由解析延拓的基本原理可知他對於所有的 z 都成立。因此函數 $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 是整函數，(137)式是他的無窮乘積表示式。

因為 $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 是整函數，所以函數 $\Gamma(z)$ 沒有零點。利用無窮乘積(137)很容易可以證明[71]中的公式(122)。實際上，由(137)式有

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)}=-z^2\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$$

或由[67]中的(93)式：

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)}=-\frac{z\sin\pi z}{\pi}。$$

再於(119)式中改 z 為 $(-z)$，可得：

$$\Gamma(-z)=-\frac{\Gamma(1-z)}{z}。$$

將這 $\Gamma(-z)$ 代入前式，卽得公式(122)：

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}。$$

剩下來還要證明當整數 $n\to\infty$ 時積分(128)的極限値是積分(111)。這時我們不妨假定 $z>0$ 來證明。首先，估計差數

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n。$$

易見函數
$$-e^v\left(1-\frac{v}{n}\right)^n$$

是函數
$$e^v\left(1-\frac{v}{n}\right)^{n-1}\frac{v}{n}$$

的原函數，因此：
$$1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=\int_0^t e^v\left(1-\frac{v}{n}\right)^{n-1}\frac{v}{n}\,dv。$$

若 $0<t<n$，則被積函數爲正，從而上式左邊亦爲正。在積分符號之內改 e^v 爲 e^t，改 $\left(1-\frac{v}{n}\right)^{n-1}$ 爲 1，則得：

$$0<1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n<e^t\,\frac{t^2}{2n}$$

或

$$0<e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n<\frac{t^2}{2n}。\tag{138}$$

做兩函數 $\Gamma(z)$ 和 $P_n(z)$ 之差：

$$\Gamma(z)-P_n(z)=\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt+\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt。\tag{139}$$

因積分
$$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

爲收斂，故當 $n\to\infty$ 時(139)式右邊第二項的極限爲零。剩下來要證明當 $n\to\infty$ 時第一項的極限也是零。對於任一已給小正數 ε 有固定的正整數 $n=n_0$，使得：

$$\int_{n_0}^\infty e^{-t}t^{z-1}dt<\frac{\varepsilon}{2}。$$

我們可以改寫(139)式的第一個積分爲：

$$\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt=\int_0^{n_0}\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt+\int_{n_0}^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt,$$

由(138)式有：

$$0<\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt<\frac{1}{2n}\int_0^{n_0}t^{z+1}dt+\int_{n_0}^{n}e^{-t}t^{z-1}dt,$$

這裏右邊第二個積分之內略去 $-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$，所以結果要大一些。因爲在這積分中被積函數爲正，故將積分區間放長，可得：

$$0<\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt<\frac{1}{2n}\int_0^{n_0}t^{z+1}dt+\int_{n_0}^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt。$$

取 n 甚大可使右邊第一項也小於 $\frac{\varepsilon}{2}$，因此對於所有足夠大的 n 成立：

$$0<\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt<\varepsilon,$$

因 ε 可以任意小，(139)式第一個積分的極限也是零。所以

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt。\tag{140}$$

注意這公式的幾個推論。取(137)式兩邊的對數導數：

$$\frac{d}{dz}\lg\Gamma(z)=-C-\frac{1}{z}+z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(z+k)}。\tag{141}$$

再微分一次：

$$\frac{d^2}{dz^2}\lg\Gamma(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^2}。\tag{142}$$

利用(130)式還可以證明所謂加倍公式：

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)。\tag{143}$$

利用(130)式將 $\Gamma(z)$ 和 $\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$ 寫成極限形式，又將 $\Gamma(2z)$ 也寫成極限形式，但改其中的 n 爲 $2n$，則得：

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2z-1}(n!)^2 2z(2z+1)\cdots(2z+2n)}{2n!\,z\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)\left(z+\frac{3}{2}\right)\cdots(z+n)\left(z+n+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{n^{2z+\frac{1}{2}}}{(2n)^{2z}}$$

或

$$(144)\quad \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}(n!)^2}{2n!\sqrt{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2z+2n+1}。$$

但
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2z+2n+1}=\frac{1}{2},$$

因此(144)式左邊也和 z 無關。置 $z=\frac{1}{2}$,得:

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

這就證明了(143)式。完全一樣,可以證明下面的更一般的公式:

$$(145)\quad \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right)=$$

$$=(2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)}n^{\frac{1}{2}-mz}\Gamma(mz)。$$

74. $\Gamma(z)$ 的路積分表示式　我們現在證明對於所有的 z 函數 $\Gamma(z)$ 可以用一個路積分來表示。若 z 位於虛軸右邊,則有:

$$(146)\quad \Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt。$$

把被積函數

$$(147)\quad e^{-t}t^{z-1}=e^{-t}e^{(z-1)\lg t}$$

看做複變數 t 的函數。這函數以 $t=0$ 爲支點。在 t 平面上沿正實軸作割線。在這樣被割後的 t 平面中函數(147)爲單值,這時我們設 $\lg t$ 在割線的上岸取實數值,即在這岸上 $\arg t=0$。現在不看割線上岸的積分而看如圖 65 所示的線路 l 上的積分。這線路從 $+\infty$ 來,繞過原點,然後又回到 $+\infty$ 去。由勾犀定理我們可以將線路 l 任意變形,祇要不碰到奇異點 $t=0$,並且維持他的兩端點於 $+\infty$,則積分

$$(148)\quad \int_l e^{-t}t^{z-1}dt \qquad (t^{z-1}=e^{(z-1)\lg t})$$

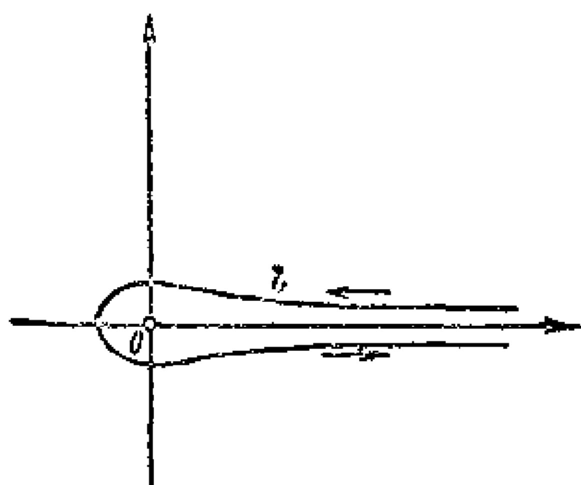


圖 65

的值不變。現在說明積分(148)和函數 $\Gamma(z)$ 的關係，但假設 z 位於虛軸的右邊。將 l 連續變形，我們可以使他變爲由下面三部分所構成的線路：(1)割線上岸的線段 $(+\infty, \varepsilon)$；(2)以 $z=0$ 爲中心半徑等於 ε 的圓周 λ_ε；(3)割線下岸的線段 $(\varepsilon, +\infty)$，在割線的上岸被積函數(147)中的 $\lg t$ 取實值。當 t 從上岸繞到下岸時 $\lg t$ 得到改變量 $2\pi i$，故在下岸被積函數爲

$$e^{(z-1)2\pi i}e^{-t+(z-1)\lg t},$$

其中 $\lg t$ 仍如前取實值。這樣就有

$$(149)\quad \int_l e^{-t}t^{z-1}dt=\int_\infty^\varepsilon e^{-t}t^{z-1}dt+e^{(z-1)2\pi i}\int_\varepsilon^\infty e^{-t}t^{z-1}dt+\int_{\lambda_\varepsilon}e^{-t}t^{z-1}dt,$$

其中 ε 爲已給正數。現在證明當 $\varepsilon\to 0$ 時沿 λ_ε 的積分的極限爲零。實際上，在這圓周上 $|e^{-t}|$ 爲有界且和 z 無關，而 t^{z-1} 可估計如下：

$$|t^{z-1}|=e^{(x-1)\lg|t|-y\arg t}=\varepsilon^{x-1}e^{-y\arg t},$$

即當 $x>1$ 時其絕對值可以無限小，否則即趨於無限大，以 $\frac{1}{\varepsilon^{1-x}}$ 爲階。由假設 $x>0$，又積分路線的長度爲 $2\pi\varepsilon$，可知這積分確以零爲極限。故將(149)式取極限，有：

$$(e^{z\cdot 2\pi i}-1)\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=\int_l e^{-t}t^{z-1}dt$$

或由 $\Gamma(z)$ 的定義有：

$$(150)\qquad \int_l e^{-t}t^{z-1}dt=(e^{2z\pi i}-1)\Gamma(z),$$

這式子也可以寫成：

(151) $$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{z2\pi i}-1}\int_l e^{-t}t^{z-1}\,dt.$$

線路 l 不經過原點 $t=0$，因此我們可以不必限於僅僅考慮虛軸以右的 z。和在 [71] 中處理積分 (113) 一樣，我們可以知道積分 (148) 是 z 的整函數。公式(150)祇當 z 位於虛軸右邊時已經證明了，但由解析延拓的原理可知他對於所有的 z 都成立。公式 (151) 將一單純函數表示爲兩個整函數的商。當 z 取正整數或負整數值時分母 $(e^{z2\pi i}-1)=0$。其中 $z=0$ 和 z 等於負整數都是 $\Gamma(z)$ 的極點。若 z 等於正整數，則被積函數(147)在全 t 平面上爲正則單值（即爲 t 的整函數），故由勾犀定理，他沿閉線路 l 的積分等於零，即當 z 爲正整數時 (151) 式右邊的分子和分母同時爲零，故正整數不是 $\Gamma(z)$ 的極點。

在(150)式中改 z 爲 $1-z$：

(152) $$\int_l e^{-t}t^{-z}\,dt=(e^{-z2\pi i}-1)\,\Gamma(1-z),$$

置 $t=e^{\pi i}\tau=-\tau$，得：

(153) $$\int_l e^{-t}t^{-z}\,dt=-\int_{l'}e^{\tau}(e^{\pi i}\tau)^{-z}d\tau=-e^{-z\pi i}\int_{l'}e^{\tau}\tau^{-z}d\tau,$$

其中線路 l' 如圖 66 所示。

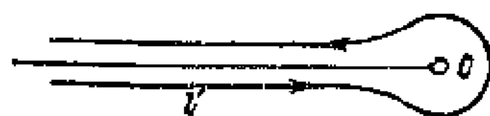


圖 66

τ 平面是由 t 平面繞着原點旋轉角度 $(-\pi)$ 而得到。t 平面上沿正實軸的割線變成 τ 平面上沿負實軸的割線，且上岸變爲下岸，下岸變爲上岸。在 τ 平面上割線的下岸應有 $\arg(e^{\pi i}\tau)=0$，即 $\arg\tau=-\pi$。將(153)式代入(152)式，再以 $(-e^{\pi z i})$ 乘等式的兩邊：

$$\int_{l'}e^{\tau}\tau^{-z}d\tau=(e^{\pi z i}-e^{-\pi z i})\Gamma(1-z)$$

或
$$\int_{\Gamma} e^{\tau}\tau^{-z}d\tau = 2i\sin\pi z\,\Gamma(1-z),$$

再利用(122)式,即得 $\Gamma(z)^{-1}$ 的路積分表示式:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\tau}\tau^{-z}d\tau。 \tag{154}$$

75. 史斗林公式 在這一節裏面我們要求當 z 取甚大的正值時函數 $\lg\Gamma(z)$ 的近似式。首先,證明一個公式,他確定一個函數的積分和這函數在若干等距離點的值的和之間的關係。

設 $f(x)$ 當 $x\geqslant 0$ 時有定義,且有連續的導數。設 n 和 k 都是非負整數,$k\leqslant n$,則可寫:

$$f(n)-f(k)=\int_k^n f'(x)\,dx,$$

關於 k 從 0 到 n 相加,得:

$$(n+1)f(n)-\sum_{k=0}^{n} f(k)=\sum_{k=0}^{n}\int_k^n f'(x)dx。 \tag{155}$$

右邊可展開而寫成:

$$\sum_{k=0}^{n}\int_k^n f'(x)dx=\int_0^n f'(x)dx+\int_1^n f'(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f'(x)dx+\int_n^n f'(x)dx,$$

其中最後一項顯然等於零。若 m 爲小於 n 的非負整數,則上式中在區間 $(m,\ m+1)$ 上的積分出現 $(m+1)$ 次,故(155)式可以寫爲:

$$(n+1)f(n)-\sum_{k=0}^{n} f(k)=\int_0^n \{[x]+1\}f'(x)dx, \tag{156}$$

這裏 $[x]$ 表示正數 x 的整數部分。在區間 $(m,\ m+1)$ 內部 $[x]=m$, $[m]=m$, 現在考察函數

$$P(x)=[x]-x,$$

這是 x 的分數部分的負値。若 x 得到改變量 1, 則 $[x]$ 也得到改變量 1, 故 $P(x)$ 的値不變,即 $P(x)$ 以 1 爲週期。函數 $P(x)$ 祗在 $x\geqslant 0$ 時已有定義,但是我們顯然可以利用他的週期性把他的定義域拓廣到 $x<0$ 去。如[II, 142]所知,$P(x)$ 在長度爲 1 的任何區間上的積分常有定值,他和區間的位置無關。這定值即所謂週期函數的平均值。在區間 $(0,\ 1)$ 的內部 $P(x)=-x$, 因此 $P(x)$ 的平均値是:

$$\int_0^1 P(x)dx=-\int_0^1 x\,dx=-\frac{1}{2}。$$

再做另一週期爲 1 的函數

$$P_1(x)=[x]-x+\frac{1}{2}, \tag{157}$$

這函數的平均值等於零,其圖形如圖 67 所示。將(157)式中的 $[x]$ 代入(156)式的積分中:

$$(n+1)f(n)-\sum_{k=0}^{n} f(k)=\int_0^n \left\{x+\frac{1}{2}+P_1(x)\right\}f'(x)dx。 \tag{158}$$

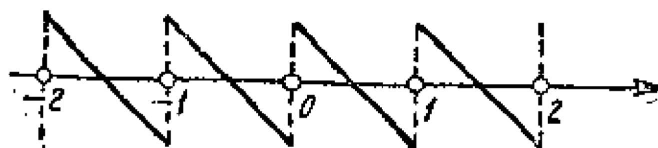


圖 67

顯見
$$\int_0^n \frac{1}{2} f'(x)\,dx = \frac{1}{2}[f(n)-f(0)],$$

行分部積分,得:
$$\int_0^n x f'(x)\,dx = n f(n) - \int_0^n f(x)dx。$$

代入(158)式,卽得下面的公式:

$$(159)\qquad \sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}[f(n)+f(0)] - \int_0^n P_1(x)f'(x)dx,$$

他表示函數 $f(x)$ 的諸值 $f(k)$ 和 $f(x)$ 的積分之間的關係。

現在取 $f(x)$ 爲:

$$f(x) = \lg(z+x),$$

其中 z 是正數,對數取實值。代入(159)式後,再整理等式右邊,得:

$$\sum_{k=0}^{n} \lg(z+k) = \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\lg(z+n) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z - n - \int_0^n \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx。$$

以 $z=1$ 代入,得到另一等式,從上式每項減去這等式的對應項,然後再從等號的兩邊都減去 $(z-1)\lg n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \lg\frac{z+k}{1+k} - (z-1)\lg n = (z-1)\lg\left(1+\frac{z}{n}\right) + \frac{1}{2}\lg\left(1+\frac{z-1}{1+n}\right) +$$
$$+(1+n)\lg\left(1+\frac{z-1}{1+n}\right) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z - \int_0^n \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx + \int_0^n \frac{P_1(x)}{1+x}\,dx。$$

當 $n\to\infty$ 時右邊前兩項的極限爲零,第三項的極限爲[I, 38]:

$$\lim_{n\to\infty}(1+n)\lg\left(1+\frac{z-1}{1+n}\right) = \lim_{n\to\infty}\lg\left(1+\frac{z-1}{1+n}\right)^{1+n} = \lg e^{z-1} = z-1。$$

因此可寫:
$$\lim_{n\to\infty}\lg\left[\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{1\cdot 2\cdots n}n^{-z}\cdot\frac{n}{n+1}\right] =$$
$$=(z-1) + \left(\frac{1}{2}-z\right)\lg z - \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx + \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{1+x}\,dx,$$

或[73]:

$$(160)\qquad \lg\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z - z + 1 - \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{1+x}\,dx + \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx。$$

再考察函數:

$$(161)\qquad Q(x) = \int_0^x P_1(x)dx。$$

因爲 $P_1(x)$ 的平均值等於零，故函數 $Q(x)$ 是週期爲 1 的連續函數，且 $Q(0)=0$。這函數的絕對值亦爲有界。若 $0\leqslant x<1$，則 $[x]=0$，由(157)式有：

$$Q(x)=\int_0^x\left(\frac{1}{2}-x\right)dx=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\qquad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

由此有：

$$0\leqslant Q(x)\leqslant\frac{1}{8}。\tag{162}$$

行分部積分，得：

$$\int_0^\infty\frac{P_1(x)}{z+x}dx=\int_0^\infty\frac{Q'(x)}{z+x}dx=\int_0^\infty\frac{Q(x)}{(z+x)^2}dx+\left[\frac{Q(x)}{z+x}\right]_{x=0}^{x=\infty}=\int_0^\infty\frac{Q(x)}{(z+x)^2}dx,\tag{163}$$

其中積分出來的項當 $x=0$ 和 $x=\infty$ 時都等於零。

由(163)式可知等式左邊的積分確有意義［參看 II, 83］。現在藉關係 $x=zt$ 引進變數 t 以代 x，則

$$\int_0^\infty\frac{P_1(x)}{z+x}dx=\frac{1}{z}\int_0^\infty\frac{Q(zt)}{(1+t)^2}dt。\tag{164}$$

由(162)式有：

$$\left|\int_0^\infty\frac{P_1(x)}{z+x}dx\right|\leqslant\frac{1}{z}\int_0^\infty\frac{Q(zt)}{(1+t)^2}dt\leqslant\frac{1}{8z}\int_0^\infty\frac{dt}{(1+t)^2}=\frac{1}{8z}。$$

所以當正數 z 無限增大時積分(164)的極限爲零，且這積分和 z 的乘積仍爲有界。這事實通常記爲：

$$\int_0^\infty\frac{P_1(x)}{z+x}dx=O\left(\frac{1}{z}\right)。$$

這樣(160)式就可寫成：

$$\lg\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+C+O\left(\frac{1}{z}\right),\tag{165}$$

或

$$\lg\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+C+\omega(z),\tag{166}$$

其中

$$|\omega(z)|\leqslant\frac{1}{8z},\tag{167}$$

又常數 C 表示　$$C=1-\int_0^\infty\frac{P_1(x)}{1+x}dx。$$

現在要決定這常數的值。爲此可藉華力斯公式將 $\frac{\pi}{2}$ 表示爲一分數式的極限：

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2\cdot4^2\cdots(2n-2)^2\cdot2n}{1^2\cdot3^2\cdots(2n-1)^2}。\tag{168}$$

爲完備起見，我們將在這一節最後補證華力斯公式。

公式(168)可以改寫爲：

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-\frac{1}{2}}(n!)^2n^{-\frac{1}{2}}}{(2n)!},$$

取對數並記住當 m 爲正整數時 $m!=\Gamma(m+1)$，得：

$$\lim_{n\to\infty}\left[2\lg\Gamma(n+1)-\lg\Gamma(2n+1)+\left(2n-\frac{1}{2}\right)\lg 2-\frac{1}{2}\lg n\right]=\lg\sqrt{\frac{\pi}{2}}。$$

利用公式(165)可以將這等式改寫爲：

$$\lim_{n\to\infty}\left[(2n+1)\lg(n+1)-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\lg(2n+1)-1+C+\right.$$

$$\left.+\left(2n-\frac{1}{2}\right)\lg 2-\frac{1}{2}\lg n\right]=\lg\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\left\{2n[\lg(n+1)+\lg 2-\lg(2n+1)]+\right.$$

$$\left.+\left[\lg(n+1)-\frac{1}{2}\lg(2n+1)-\frac{1}{2}\lg n\right]+C-1-\frac{1}{2}\lg 2\right\}=\lg\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\lg\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n}+\frac{1}{2}\lg\frac{(n+1)^2}{n(2n+1)}+C-1-\frac{1}{2}\lg 2\right\}=\lg\sqrt{\frac{\pi}{2}}。$$

花括弧中第一項的極限爲 $\lg e=1$，第二項的極限爲 $\left(-\frac{1}{2}\lg 2\right)$，故得等式

$$1-\frac{1}{2}\lg 2+C-1-\frac{1}{2}\lg 2=\lg\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

從而 $C=\lg\sqrt{2\pi}$。代入(165)式，即得斯特林公式：

(169) $$\lg\Gamma(z)=\lg\sqrt{2\pi}+\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\omega(z)$$

除去對數，得：

(170) $$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}\,z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\varepsilon(z),$$

其中乘數 $\varepsilon(z)=e^{\omega(z)}$ 當 z 無限增大時極限爲 1。若 z 等於正整數 m，則以 m 乘等式兩邊，得：

(171) $$m!=\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m\varepsilon_m,$$

這裏 $\varepsilon_m\to 1$ 當 $m\to\infty$ 時。

如我們所知，函數 $\Gamma(z)$ 沒有零點，又 $\lg\Gamma(z)$ 在具有沿負實軸的割線的 z 平面中爲單值正則函數。如果我們用一個以原點爲頂點的任意小扇形除去這割線，則在餘下的 z 平面中成立公式(169)。這事實的證明和我們以上假設 $z>0$ 時證明 (169) 式完全一樣。但是在這有割線的平面中 $\lg z$ 和 $\lg\Gamma(z)$ 的值應如此取法，使得當 $z>0$ 時他們都是實數。

華力斯公式　現在證明前面用過的華力斯公式。我們以前[I，100]有過下面的式子：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\, dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\, dx = \frac{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5\cdot 3}。$$

因爲當 n 增大時 $\sin^n x$ 減少，故有：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x\, dx,$$

即
$$\frac{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5\cdot 3} < \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1\cdot \pi}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2\cdot 2} < \frac{(2k-2)(2k-4)\cdots 4\cdot 2}{(2k-1)(2k-3)\cdots 5\cdot 3},$$

由此改 k 爲 n，得：
$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}。$$

設
$$P_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1},$$

則有
$$P_n\cdot\frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < P_n。$$

當 $n\to\infty$ 時左邊的分數以 1 爲極限，因此有

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{\pi}{2},$$

即華力斯公式。

76. 尤拉求和公式　現在回到前面的公式（159）。將該式右邊最後一項施行幾次分部積分，可以把右邊寫成展開的形式。再藉(161)式定義週期爲 1 的函數 $Q(x)$ 使 $Q'(x)=P_1(x)$。給 $Q(x)$ 加上一個常數項我們可以使得這函數的平均值等於零、變更所得函數的符號，記之爲 $P_2(x)$，則 $P_2(x)$ 是週期爲 1 的函數，其平均值等於零，且 $P_2'(x)=-P_1(x)$。我們知道當$0\leqslant x<1$ 時 $P_1(x)=-x+\frac{1}{2}$，因此

$$P_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+C \qquad (0\leqslant x<1),$$

常數 C 可由條件
$$\int_0^1 P_2(x)\,dx=0$$

來決定，其值爲 $\frac{1}{12}$，故
$$P_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{12} \qquad (0\leqslant x<1)。$$

現在 $P_2(0)=P_2(1)=\frac{1}{12}$，因此 $P_2(x)$是個連續的週期函數，於是上式就在整個閉區間 $0\leqslant x\leqslant 1$ 中成立。再下去我們如前一樣定義週期爲 1，平均值等於零的函數 $P_3(x)$，使得 $P_3'(x)=P_2(x)$。這函數在基本區間(0，1)中可表示爲：

$$P_3(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12}。$$

繼續做下去,我們可以得到一列週期爲 1,平均值等於零的函數 $P_n(x)$, 滿足

(172) $$P'_{2m}(x)=-P_{2m-1}(x);\quad P'_{2m+1}(x)=P_{2m}(x)。$$

我們可以把所有這些週期函數展開成福里哀級數,在每一福里哀級數中常數項必等於零,因爲這些函數的平均值都等於零的緣故。由圖 67 顯然知道 $P_1(x)$是奇函數。用通常的方法求其福里哀係數,得

$$P_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}。$$

同樣對於次一函數 $P_2(x)$ 有:

$$P_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{2n^2\pi^2}。$$

注意: 這級數可藉 $P'_2(x)=-P_1(x)$ 的關係由 $P_1(x)$ 的福里哀級數變號以後再逐項積分而得到。$P_2(x)$的福里哀級數對所有實的 x 爲一致收斂。利用(172)的關係和逐項積分的方法我們可以得到所有的 $P_n(x)$的福里哀級數,其中常數項都應該等於零.

這些級數的形式如下:

(173) $$P_{2m}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{2^{2m-1}n^{2m}\pi^{2m}};\quad P_{2m+1}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{2^{2m}n^{2m+1}\pi^{2m+1}},$$

由這些式子可得:

$$P_{2m}(0)=\frac{1}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}};\ P_{2m+1}(0)=0。$$

爲以後計算便利起見,記:

(174) $$P_{2m}(0)=\frac{1}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}=\frac{B_m}{(2m)!},$$

其中 B_m 稱爲白諾利數。

回到(159)式。施行分部積分,並記住

$$P_{2m}(0)=P_{2m}(n)=\frac{B_m}{(2m)!};\quad P_{2m+1}(0)=P_{2m+1}(n)=0,$$

可得:

$$-\int_0^n P_1(x)f'(x)dx=\int_0^n P'_2(x)f'(x)dx=\frac{B_1}{2!}[f'(n)-f'(0)]-\int_0^n P_2(x)f''(x)dx=$$

$$=\frac{B_1}{2!}[f'(n)-f'(0)]-\int_0^n P'_3(x)f''(x)dx=\frac{B_1}{2!}[f'(n)-f'(0)]+$$

$$+\int_0^n P_3(x)f'''(x)dx=\frac{B_1}{2!}[f'(n)-f'(0)]-\int_0^n P'_4(x)f'''(x)dx=$$

$$=\frac{B_1}{2!}[f'(n)-f'(0)]-\frac{B_2}{4!}[f'''(n)-f'''(0)]+\int_0^n P_4(x)f^{(IV)}(x)dx,$$

繼續做下去，即得尤拉求和公式：

(175)
$$\sum_{k=0}^{n} f(k)=\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2}[f(0)+f(n)]+\frac{B_1}{2!}[f'(n)-f'(0)]-$$
$$-\frac{B_2}{4!}[f'''(n)-f'''(0)]+\cdots+(-1)^m\frac{B_{m+1}}{(2m+2)!}[f^{(2m+1)}(n)-f^{(2m+1)}(0)]+$$
$$+(-1)^m\int_0^n P_{2m+3}(x)f^{(2m+3)}(x)dx。$$

在這種演算之中我們當然假設當 $x\geqslant 0$ 時 $f(x)$ 有直到 $(2m+3)$ 階的連續導數。

上式右邊最後一項稱爲尤拉公式中的剩餘項。由(174)式易知當 n 增加時 B_n 增加得很快，而對應的尤拉公式中的無窮級數一般爲發散。但有時利用(175)式來計算該式左邊的和的近似值卻很便利。

把常數 C 的數值代入(169)式中，可得：

$$\lg\Gamma(z)=\lg\sqrt{2\pi}+\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\int_0^\infty\frac{P_1(x)}{z+x}dx。$$

將上式最後一項施行分部積分，記住 $P_n(x)$ 對於所有實的 x 爲有界，又應用(174)式的記號，可以知道當 $z>0$ 時有：

$$\lg\Gamma(z)=\lg\sqrt{2\pi}+\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{B_3}{5\cdot 6}\cdot\frac{1}{z^5}-\cdots+$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{1}{z^{2m-1}}+(-1)^{m-1}(2m)!\int_0^\infty\frac{P_{2m+1}(x)}{(z+x)^{2m+1}}dx。$$

和上節一樣，可以證明上式最後的積分以 z^{2m+1} 乘之，當 $z\to+\infty$ 時仍爲有界，即

$$\int_0^\infty\frac{P_{2m+1}(x)}{(z+x)^{2m+1}}dx=O\left(\frac{1}{z^{2m+1}}\right),$$

而上面的公式就可寫成：

(176)
$$\lg\Gamma(z)=\lg\sqrt{2\pi}+\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots+$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{1}{z^{2m-1}}+O\left(\frac{1}{z^{2m+1}}\right)。$$

如果除去上式中的剩餘項，而寫出對應的無窮級數，則這級數對所有的 z 爲發散。若將 m 固定，則當 $z\to+\infty$ 時剩餘項變爲 $\frac{1}{z^{2m+1}}$ 階的無窮小，而其前一項爲 $\frac{1}{z^{2m-1}}$ 階的無窮小。

和(169)式一樣，(176)式在整個 z 平面中除去以負實軸爲角二等分線的任意小的扇形區域以外的部分都成立。若 z 爲正實數，則可更準確的估計剩餘項而成立下面的公式：

(176_1)
$$\lg\Gamma(z)=\lg\sqrt{2\pi}+\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots+$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{1}{z^{2m-1}}+\theta_m(-1)^m\frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)}\cdot\frac{1}{z^{2m+1}},$$

其中 $0<\theta_m<1$。這式子暫不擬證明。

77．白諾利数 我們用下面的等式定義白諾利數：

(177)
$$B_m=\frac{(2m)!}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}。$$

現在我們證明這些數可以用完全初等的辦法次第定義起來，並且他們都是有理數。

首先寫下 $\operatorname{ctg} z$ 的最簡分數展開式[65]：

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right),$$

或
$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-k^2\pi^2},$$

或由尤拉公式將左邊表示爲指數函數：

$$i\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{e^{zi}-e^{-zi}}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-k^2\pi^2}。$$

置 $z=\frac{u}{2i}$，得

$$\frac{e^{\frac{u}{2}}+e^{-\frac{u}{2}}}{e^{\frac{u}{2}}-e^{-\frac{u}{2}}}=\frac{2}{u}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u}{4k^2\pi^2+u^2},$$

卽
$$\frac{e^u+1}{e^u-1}=\frac{2}{u}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u}{4k^2\pi^2+u^2},$$

或
$$\frac{2}{e^u-1}+1=\frac{2}{u}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u}{4k^2\pi^2+u^2}。$$

這式子也可改寫爲：

(178)
$$\frac{u}{e^u-1}-1+\frac{u}{2}=2u^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2\pi^2+u^2}。$$

又可寫：
$$\frac{u^2}{4k^2\pi^2+u^2}=-\sum_{p=1}^{\infty}\left(-\frac{u^2}{4k^2\pi^2}\right)^p \qquad (|u|<2k\pi)。$$

代(178)入式，得
$$\frac{u}{e^u-1}-1+\frac{u}{2}=-2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\left(-\frac{u^2}{4k^2\pi^2}\right)^p\right],$$

應用二重冪級數的維爾史特拉斯定理的推論，當 $|u|<2\pi$ 時可將上式右邊表示爲 u 的正整數冪的冪級數：

$$\frac{u}{e^u-1}-1+\frac{u}{2}=2\left[\frac{s_2u^2}{(2\pi)^2}-\frac{s_4u^4}{(2\pi)^4}+\frac{s_6u^6}{(2\pi)^6}-\cdots\right],$$

其中
$$s_p=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots。$$

由(177)式有：

(179)
$$\frac{u}{e^u-1}=1-\frac{u}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}B_m\frac{u^{2m}}{(2m)!}。$$

等式左邊的函數有奇異點，其與原點最近的是 $u=\pm 2\pi i$，因此右邊的冪級數的收斂圓是 $|u|<2\pi$。將左邊的分母展開爲級數

$$e^u-1=\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\cdots,$$

再去除 u，然後比較所得的級數和右邊的級數，即可決定白諾利數 B_m。其最前幾個的值如下：

$$B_1=\frac{1}{6};\ B_2=\frac{1}{30};\ B_3=\frac{1}{42};\ B_4=\frac{1}{30};\ B_5=\frac{5}{66};\ B_6=\frac{691}{2730}。$$

73. 最速下降法 在以後各節中我們要研究某種形式的路積分的近似計算法。首先，闡明和正則函數的實數與虛數部分的變化有關的幾個問題。假設函數

$$f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$$

在區域 B 中爲正則。在 B 中每一使 $f'(z)$ 不等於零的點常存在一定的方向 l，使 $u(x,\ y)$ 沿這方向變動得最快。l 即向量 $\operatorname{grad} u(x,\ y)$ 的方向，沿這方向及其反對方向 $u(x,y)$ 的導數絕對值最大。又 $u(x,y)$ 沿垂直與 l 的方向 n 的導數顯然等於零[II, 108]。諸方向 n 所成的向量場決定曲線族 $u(x,y)=\text{const}$，而和他正交的 l 向量場則決定曲線族 $v(x,y)=\text{const}$。因此我們也可以說：在每一使 $f'(z)$ 不等於零的點 $u(x,\ y)$ 沿曲線 $v(x,\ y)=\text{const}$ 變動得最快。注意：沿這曲線 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 常不等於零。若在某一點 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 同時爲零，則在此點函數 u 沿任一方向的導數亦爲零，因此導數 $f'(z)$ 也在這點等於零。

現在研究這些曲線在使 $f'(z)$ 等於零的點 z_0 的鄰域中有些什麼性質。在 z_0 的鄰域中有

$$f(z)-f(z_0)=(z-z_0)^p[b_0+b_1(z-z_0)+\cdots]\qquad(p\geqslant 2;\ b_0\neq 0)。\tag{180}$$

設

$$b_\nu=r_\nu e^{i\beta_\nu};\quad z-z_0=\rho e^{i\omega}\qquad(r_0\neq 0)\tag{181}$$

分別置 $f(z)-f(z_0)$ 的實數和虛數部分等於零，可得曲線 $u(x,\ y)=\text{const}$ 和 $v(x,y)=\text{const}$ 在 z_0 的鄰域中的方程：

$$\begin{aligned}\Phi_1(\rho,\ \omega)=r_0\cos(\beta_0+p\omega)+r_1\rho\cos[\beta_1+(p+1)\omega]+\\+r_2\rho^2\cos[\beta_2+(p+2)\omega]+\cdots=0,\end{aligned}\tag{182}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(\rho,\ \omega)=r_0\sin(\beta_0+p\omega)+r_1\rho\sin[\beta_1+(p+1)\omega]+\\+r_2\rho^2\sin[\beta_2+(p+2)\omega]+\cdots=0。\end{aligned}\tag{183}$$

考察方程(182)。當 $\rho=0$ 時有：

$$\cos(\beta_0+p\omega)=0,$$

即

$$\beta_0+p\omega=(2m+1)\frac{\pi}{2},$$

其中 m 爲任意整數。設 $m=0,\ 1,\ \cdots,\ 2p-1$ 可得當 $\rho=0$ 時方程(182)關於 ω 的全部不同的解：

(184) $$\omega_m=-\frac{\beta_0}{p}+\frac{2m+1}{2p}\pi \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2p-1)。$$

易見 $$\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega}\right|_{\rho=0,\ \omega=\omega_m}\neq 0,$$

故由隱函數的存在定理 [I, 159] 知方程(182)關於 ω 有 $2p$ 個解，他們都是 ρ 的連續函數，且當 $\rho\to 0$ 時趨向 ω_m，就是說，方程(182)表示從 z_0 出發的 $2p$ 條曲線，他們在這點的切線的斜角為 ω_m。因為 $\omega_{m+p}=\omega_m+\pi$，所以實際上祇是 p 條通過 z_0 的曲線而已。這些曲線分 z_0 的鄰域為 $2p$ 個有同一頂角 $\frac{\pi}{p}$ 的彎曲扇形。在這些扇形的內部交互地成立 $\Phi_1(\rho,\ \omega)<0$ 和 $\Phi_1(\rho,\ \omega)>0$，即當

$$\frac{\pi}{2}+m\pi<\beta_0+p\omega<\frac{\pi}{2}+(m+1)\pi$$

時 $$\Phi_1(\rho,\omega)\begin{cases}<0,\ 若\ m\ 為偶數,\\ >0,\ 若\ m\ 為奇數。\end{cases}$$

這是因為對於某一對固定的 ω_m 和 ω_{m+1} 之間的 ω，當 ρ 非常接近於零時 $\Phi_1(\rho,\ \omega)$ 的符號可由(182)式右邊的第一項來決定。

同樣由方程(183)我們也得到通過 z_0 的 p 條曲線，而這些曲線的切線恰為(182)式所決定的諸扇形頂角的角二等分線。

z_0 稱為鞍點，使 $\Phi_1(\rho,\ \omega)<0$ 的扇形稱為負扇形，使 $\Phi_1(\rho,\ \omega)>0$ 的扇形稱為正扇形。

現在考察如下形式的積分：

(185) $$I_n=\int_l (z-z_0)^{\alpha-1}F(z)[\varphi(z)]^n dz=\int_l (z-z_0)^{\alpha-1}F(z)e^{nf(z)}dz,$$

其中 $F(z)$，$\varphi(z)$ 和 $f(z)=\lg\varphi(z)$ 在 z_0 為正則，且 $F(z_0)$ 和 $\varphi(z_0)$ 不等於零，n 為大整數。假設線路 l 的起點是鞍點 z_0，而終點 z_1 在負扇形之中。這時 $|e^{nf(z)}|=e^{nu(x,\ y)}$ 在 z_0 有極大值，而當 n 甚大時這極大值有顯著的特徵。因此我們可以想像到積分(185)的主要部分乃是在 l 上和 z_0 接近的那一部分的積分，並且如果取這部分線路使沿曲線 $v(x,\ y)=\text{const}$，則更為有利，因為沿這曲線 $u(x,\ y)$ 增大得最快。由勾犀定理知道積分線路可以變形，故不妨取這曲線的一小段切線以代替之。這樣，積分(185)就分成兩部分，其一是沿 z_0 的鄰近小段線路 l' 的積分，另一是沿餘下的線路 l'' 上的積分。沿 l'' 的積分我們估計他的模，而成為 I_n 的主要部分的沿 l' 的積分則用近似法來計算，這時應求出計算中誤差的大小。沿 l' 的積分的近似算法通常是把被積分函數展開為泰勒級數而後估計這級數的剩餘項。在下一節中我們就將依照這步驟來計算積分的值，應用比較粗劣的估計先分出 I_n 的主要部分，再以 $\frac{1}{n}$ 來衡量餘下的部分的大小。

現在先對計算形式如(185)的積分作幾點一般的注意。線路 l 可能從一個負扇形經過鞍點而進入另一個負扇形。和前面一樣，這時 I_n 的主要部分乃是在 z_0 鄰近的小段線路上的積

分，並且這線路應沿曲線 $v(x, y)=\text{const}$ 或其切線。若線路 l 在正扇形之內，則 I_n 的主要部分是在 z_1 鄰近的小段線路上的積分，且這線路應取 $u(x, y)$ 增加最快的方向（即沿曲線 $v(x, y)=\text{const}$）。若被積分函數爲多值，則須作割線以使之變爲單值，若積分線路非和這種割線相遇不可，那麽積分路線的一部分就須沿着割線進行，故割線的選取必須依照以上的指示去做。如果線路 l 所經的區域中有幾個鞍點，則應比較被積函數的模在這些鞍點的行爲，並且依照前述的指示來選取積分路線。在以後的許多例題中我們將要說明如何應用這些一般的指示。現在且回頭來看位於負扇形中的線路上的積分，並且祇以 $\frac{1}{n}$ 的冪來做衡量無窮小的階次。不失一般性，我們可設 $z_0=0$。此外，將 $f(z)$ 寫成 $f(z_0)+[f(z)-f(z_0)]$，然後把 $e^{f(z_0)}$ 拿到積分符號之外去，我們可設 $f(z_0)=0$，即 $\varphi(z_0)=1$。

79. 分出積分的主要部分　現在考察積分

$$I_n=\int_0^{z_1} z^{\alpha-1}F(z)[\varphi(z)]^n dz=\int_0^{z_1} z^{\alpha-1}F(z)e^{nf(z)}dz, \tag{186}$$

其中積分路線從鞍點 $z=0$ 起到負扇形中的一點 z_1 止，這負扇形對應於偶數 $m=2l$。假設函數 $F(z)$ 和 $\varphi(z)$ 在某一包含積分路線在其內的區域中爲正則，又設在 $z=0$ 的鄰域中

$$F(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots;\quad f(z)=\lg\varphi(z)=z^p(b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots), \tag{187}$$

其中 a_0 和 b_0 不等於零。要積分在下限 $z=0$ 存在，可設 α 的實數部分 $R(\alpha)$ 爲正。由勾歇定理知可將積分路線在原點的鄰域中變形而使他從原點開始到 $z=\rho_0e^{i\omega_0'}$ 這一段合於最速下降線在原點的切線，即對應於 $m=2l$ 的扇形的頂角二等分線，然後再從 $z=\rho_0e^{i\omega_0'}$ 到 $z=z_1$。在後一線路上 $\max|\varphi(z)|<1-\eta$，其中 η 爲一正數，與 ρ_0 的選擇有關。以後我們取 ρ_0 與 n 獨立，使得在後一線路上積分(186)的模不大於 $M(1-\eta)^n$，其中 M 是個和 n 無關的常數，由是

$$I_n=\int_0^{\rho_0e^{i\omega_0'}} z^{\alpha-1}F(z)\varphi(z)^n dz+O[(1-\eta)^n], \tag{188}$$

其中 $O[(1-\eta)^n]$ 當 $n\to\infty$ 時趨向零，並且被除於 $(1-\eta)^n$ 後仍爲有界（當 $n\to\infty$）。一般，我們以後用 $O(\alpha_n)$ 表示一個和 n 有關的數值，他被除於 α_n 後當 $n\to\infty$ 時仍爲有界。對應於 $m=2l$ 的扇形的角二等分線其幅角爲：

$$\omega_0'=-\frac{\beta_0}{p}+\frac{2l+1}{p}\pi. \tag{189}$$

設 σ 爲一正數，小於(187)中兩級數的收斂半徑。我們在任何情形之下常取 $\rho_0<\sigma$。級數 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}b_\nu z^\nu$ 和他的導級數 $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\nu b_\nu z^{\nu-1}$ 有和(187)中第二個級數相同的收斂半徑。

應用關於冪級數的係數的估計[14]，可寫：

$$|a_\nu|\leqslant\frac{M}{\sigma^\nu};\quad |b_\mu|\leqslant\frac{M}{\mu\sigma^\mu}\qquad\begin{pmatrix}\nu=0,1,2,\cdots\\ \mu=1,2,3,\cdots\end{pmatrix}, \tag{190}$$

其中 M 爲一常數。爲以後的計算尙須引新的概念。

我們稱冪級數 $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu$（或由他所定義之函數）爲冪級數 $\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu z^\nu$（或這函數）的强函數，如果 g_ν 皆非負數，且 $|h_\nu| \leqslant g_\nu$。這時顯然成立下之不等式：

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu z^\nu\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu |z|^\nu,$$

當然，我們假設兩級數均爲收斂。

將 $F(z)\varphi(z)^n$ 展開成：

$$F(z)\varphi(z)^n = (a_0 + a_1 z + \cdots) e^{n(b_0 z^p + b_1 z^{p+1} + \cdots)} = \tag{191}$$

$$= a_0 e^{nb_0 z^p} + e^{nb_0 z^p}\left[(a_0 + a_1 z + \cdots) e^{nz^p(b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)} - a_0\right].$$

上式方括弧中的差展開爲冪級數時沒有常數項：

$$\psi(z) = (a_0 + a_1 z + \cdots) e^{nz^p(b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)} - a_0 = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \tag{192}$$

因爲 e^z 展開成冪級數時係數皆爲正，故若以 $F(z)$ 和 $f(z)$ 的强函數代替(192)式中所含的 $F(z)$ 和 $f(z)$，則得 $\psi(z)$ 的强函數

$$\left(M + M\frac{z}{\sigma} + M\frac{z^2}{\sigma^2} + \cdots\right) e^{nz^p\left(\frac{M}{1}\cdot\frac{z}{\sigma} + \frac{M}{2}\cdot\frac{z^2}{\sigma^2} + \cdots\right)} - M$$

或

$$M\left(1 - \frac{z}{\sigma}\right)^{-1} e^{-Mnz^p \lg\left(1 - \frac{z}{\sigma}\right)} - M = M\left[\left(1 - \frac{z}{\sigma}\right)^{-1-Mnz^p} - 1\right], \tag{193}$$

這級數中也沒有常數項。爲簡便計，記 $nz^p = z'$，則這强函數可寫成：

$$M\frac{z}{\sigma}\left[\frac{1+Mz'}{1!} + \frac{(1+Mz')(2+Mz')}{2!}\left(\frac{z}{\sigma}\right) + \frac{(1+Mz')(2+Mz')(3+Mz')}{3!}\left(\frac{z}{\sigma}\right)^2 + \cdots\right].$$

把 $(1+Mz')$ 拿到括弧外面來，得：

$$(1+Mz')M\frac{z}{\sigma}\left[1 + \left(1 + \frac{Mz'}{2}\right)\left(\frac{z}{\sigma}\right) + \left(1 + \frac{Mz'}{2}\right)\left(1 + \frac{Mz'}{3}\right)\left(\frac{z}{\sigma}\right)^2 + \cdots\right],$$

再將上式諸括弧中的分數的分母變小，可得强函數：

$$(1+Mz')M\frac{z}{\sigma}\left[1 + \left(1 + \frac{Mz'}{1}\right)\left(\frac{z}{\sigma}\right) + \right. \tag{194}$$

$$\left. + \left(1 + \frac{Mz'}{1}\right)\left(1 + \frac{Mz'}{2}\right)\left(\frac{z}{\sigma}\right)^2 + \cdots\right] = (1+Mz')M\frac{z}{\sigma}\left(1 - \frac{z}{\sigma}\right)^{-1-Mz'}.$$

因此有下之不等式：

$$|\psi(z)| \leqslant (1 + Mn|z|^p) M\frac{|z|}{\sigma}\left(1 - \frac{|z|}{\sigma}\right)^{-1-Mn|z|^p} \tag{195}$$

由(191)式知(188)式中的積分可分爲兩部分：

$$I_n = a_0\int_0^{\rho_0 e^{i\omega_0'}} z^{\alpha-1} e^{nb_0 z^p} dz + \int_0^{\rho_0 e^{i\omega_0'}} z^{\alpha-1} e^{nb_0 z^p} \psi(z) dz + O[(1-\eta)^n].$$

藉下式引進另一變數 t：

$$z=e^{i\omega_j}\sqrt[p]{\frac{t}{nr_0}},$$

由(139)式知有：

$$nz^p=-\frac{t}{b_0}$$

故得：

$$I_n=A_n+B_n+O[(1-\eta)^n], \tag{196}$$

其中

$$\left\{\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{p}e^{i\omega_j\alpha}\left(\frac{1}{nr_0}\right)^{\frac{\alpha}{p}}\alpha_0\int_0^{nr_0\rho_0^p}e^{-t}t^{\frac{\alpha}{p}-1}dt\\B_n&=\frac{1}{p}e^{i\omega_j\alpha}\left(\frac{1}{nr_0}\right)^{\frac{\alpha}{p}}\int_0^{nr_0\rho_0^p}e^{-t}t^{\frac{\alpha}{p}-1}\psi(z)dt\text{。}\end{aligned}\right. \tag{197}$$

因 $|z|=\left(\frac{t}{nr_0}\right)^{\frac{1}{p}}$，故由(195)有：

$$|\psi(z)|\leqslant\left(1+\frac{Mt}{r_0}\right)M\frac{1}{\sigma}\sqrt[p]{\frac{t}{nr_0}}\left(1-\frac{|z|}{\sigma}\right)^{-1-\frac{Mt}{r_0}},$$

我們已取 $\rho_0<\sigma$，因此沿積分路線上有 $|z|=\left(\frac{t}{nr_0}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\rho_0<\sigma$，以 ρ_0 代 $|z|$，得：

$$|\psi(z)|\leqslant\left(1+\frac{Mt}{r_0}\right)M\frac{1}{\sigma}\sqrt[p]{\frac{t}{nr_0}}\left(1-\frac{\rho_0}{\sigma}\right)^{-1-\frac{Mt}{r_0}},$$

當 $q>0$ 又 γ 爲複數時 $|q^\gamma|=q^{R(\gamma)}$，其中 $R(\gamma)$ 是 γ 的實數部分，故對 B_n 有如下之估值：

$$|B_n|\leqslant\frac{M}{p}|e^{i\omega_j\alpha}|\frac{\left(1-\frac{\rho_0}{\sigma}\right)^{-1}}{\sigma}\left(\frac{1}{nr_0}\right)^{\frac{R(\alpha)+1}{p}}\times$$

$$\times\int_0^{nr_0\rho_0^p}e^{-t}\left(1-\frac{\rho_0}{\sigma}\right)^{-\frac{Mt}{r_0}}t^{\frac{R(\alpha)+1}{p}-1}\left(1+\frac{Mt}{r_0}\right)dt,$$

對於 ρ_0，除 $\rho_0<\sigma$ 外，現在再加一個條件：

$$a=e\left(1-\frac{\rho_0}{\sigma}\right)^{\frac{M}{r_0}}>1\text{。}$$

我們可以取一個固定的滿足這條件的 ρ_0。前式的積分符號內含有因子 a^{-t}。因爲被積分的函數常爲正，把積分區間伸長至 $(+\infty)$ 時其値增大，但仍爲收斂，並且這時已和 n 沒有關係。這樣就得到：

$$|B_n|\leqslant M_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R(\alpha)+1}{p}},$$

其中 M_1 是個與 n 無關的常數，上式即：

$$B_n=O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R(\alpha)+1}{p}}\right]。$$

$O[(1-\eta)^n]$ 被除於 $(1-\eta)^n$ 後當 $n\to\infty$ 時仍爲有界。又比率 $(1-\eta)^n$：$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R(\alpha)+1}{p}}\to 0$ 當 $n\to\infty$，故 $O[(1-\eta)^n]$ 被除於 $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R(\alpha)+1}{p}}$ 後當 $n\to\infty$ 時當然有界，即

$$B_n+O[(1-\eta)^n]=O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R(\alpha)+1}{p}}\right],$$

而(196)式就可以改寫爲：

$$I_n=A_n+O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R(\alpha)+1}{p}}\right]。\tag{198}$$

再來看 A_n。可寫：

$$A_n=\frac{a_0}{p}e^{i\omega_0\alpha}\left(\frac{1}{nr_0}\right)^{\frac{\alpha}{p}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{p}-1}dt-\frac{a_0}{p}e^{i\omega_0\alpha}\left(\frac{1}{nr_0}\right)^{\frac{\alpha}{p}}\int_{nr_0\rho_0^p}^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{p}-1}dt,$$

或[71]：

$$A_n=\frac{a_0}{p}e^{i\omega_0\alpha}\left(\frac{1}{nr_0}\right)^{\frac{\alpha}{p}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)+C_n,\tag{199}$$

其中
$$C_n=-\frac{a_0}{p}e^{i\omega_0\alpha}\left(\frac{1}{nr_0}\right)^{\frac{\alpha}{p}}\int_{nr_0\rho_0^p}^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{p}-1}dt,$$

從而
$$|C_n|\leqslant\frac{|a_0|}{p}|e^{i\omega_0\alpha}|\left(\frac{1}{nr_0}\right)^{\frac{R(\alpha)}{p}}\int_{nr_0\rho_0^p}^\infty e^{-t}t^{\frac{R(\alpha)}{p}-1}dt。$$

當正數 t 甚大時函數
$$e^{-t}t^{\frac{R(\alpha)}{p}+1}$$
是 t 的減少函數，因此從上式的被積函數中分出一個因子 t^{-2}，而將餘下的以其在積分下限的數值代入，可知當 n 甚大時這積分小於

$$e^{-nr_0\rho_0^p}(nr_0\rho_0^p)^{\frac{R(\alpha)}{p}+1}\int_{nr_0\rho_0^p}^\infty\frac{dt}{t^2}=e^{-nr_0\rho_0^p}(nr_0\rho_0^p)^{\frac{R(\alpha)}{p}}。$$

故得 C_n 的估值：　　$|C_n|\leqslant M_2e^{-nr_0\rho_0^p}$。

其中常數 M_2 與 n 無關，故　　$C_n=O(e^{-nr_0\rho_0^p})$。

因當 n 增加時指數函數 $e^{-nr_0\rho_0^p}$ 較任何 n 的負冪減少得快，故可寫：

$$C_n+O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R(\alpha)+1}{p}}\right]=O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R(\alpha)+1}{p}}\right],$$

由(198)及(199)可得:

(200) $$I_n=\frac{a_0}{p}e^{i\omega_0'\alpha}\left(\frac{1}{nr_0}\right)^{\frac{\alpha}{p}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)+O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R(\alpha)+1}{p}}\right]。$$

這式中第一項和$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R(\alpha)}{p}}$同階,而第二項是比他更高階的無窮小。

如果要得到更精確的估計,可以從 I_n 中依$\frac{1}{n}$的增幂再分出幾項來,而得下面的公式,證明從略:

(201) $$I_n=\frac{1}{p}\sum_{\nu=0}^{m-1}d_\nu\left(\frac{1}{nr_0}\right)^{\frac{\alpha+\nu}{p}}+O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R(\alpha)+m}{p}}\right],$$

其中 $$d_\nu=e^{i\omega_0'(\alpha+\nu)}\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{g_{\nu,\mu}}{(-b_0)^\mu}\Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu\right),$$

$g_{\nu,0}=a_\nu$, 而$g_{\nu,\mu}$是下之展開式中 z^ν 的係數:

$$\frac{1}{\mu!}(a_0+a_1z+\cdots)(b_1z+b_2z^2+\cdots)^\mu。$$

這樣我們已經看過了從 $z=0$ 到 $z=z_1$ 的最簡單的積分路線,其中 $|\varphi(z)|$ 在起點 $z=0$ 有極大值。現在再考察積分:

(202) $$I_n'=\int_{z_1}^{z_2}z^{\alpha-1}F(z)[\varphi(z)]^n dz,$$

其中 z_1 和 z_2 所在的扇形使$|\varphi(z)|<1$。又設線路從 z_1 出發向 $z=0$, 但沿一個以 $z=0$ 爲中心半徑甚小的圓周繞過這點,然後再到 $z=z_2$。若 $R(\alpha)>0$, 則當上述圓周的半徑趨於零時沿這圓周的積分也以零爲極限,所以從 z_1 到 z_2 的積分可以先從 z_1 沿一條位於 $m=2l_1$ 的扇形中的線路積分到 $z=0$, 然後從 $z=0$ 沿一條位於 $m=2l_2$ 的扇形中的線路積分到 $z=z_2$。於是就有:

$$I_n'=I_{n,l_2}-I_{n,l_1},$$

其中 I_{n,l_2} 和 I_{n,l_1} 是形式如(186)的積分。故仿前可得:

(203) $$I_n'=\frac{a_0}{p}\left(\frac{1}{nr_0}\right)^{\frac{\alpha}{p}}\left[e^{i\omega_2'\alpha}-e^{i\omega_1'\alpha}\right]\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)+O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R(\alpha)+1}{p}}\right],$$

其中 $$\omega_1'=-\frac{\beta_0}{p}+\frac{2l_1+1}{p}\pi;\quad \omega_2'=-\frac{\beta_0}{p}+\frac{2l_2+1}{p}\pi,$$

可以證明當 $R(\alpha)\leqslant 0$ 時(203)式也成立。

例 考察 $$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^n dx。$$

設 $x=ny$, 得: $$\frac{\Gamma(n+1)}{n^{n+1}}=\int_0^\infty (ye^{-y})^n dy.$$

當 $y=1$ 時函數 ye^{-y} 有極大值。置 $y=1+z$:

$$\frac{e^n\Gamma(n+1)}{n^{n+1}}=\int_{-1}^{\infty}[(1+z)e^{-z}]^n dz_{\circ}$$

把積分的區間分成兩段:$(-1, +1)$和$(+1, +\infty)$。對第二段上的積分有:

$$\int_1^{\infty}[(1+z)e^{-z}]^n dz=\int_1^{\infty}[(1+z)e^{-z}]^{n-1}(1+z)e^{-z}dz<$$

$$<\int_1^{\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^{n-1}(1+z)e^{-z}dz=\left(\frac{2}{e}\right)^{n-1}\int_1^{\infty}(1+z)e^{-z}dz,$$

因為當 $z>1$ 時 $$(1+z)e^{-z}<\frac{2}{e}_{\circ}$$

這樣

(204) $$\int_1^{\infty}[(1+z)e^{-z}]^n dz=O\left[\left(\frac{2}{e}\right)^n\right]_{\circ}$$

積分

(205) $$\int_{-1}^{+1}[(1+z)e^{-z}]^n dz$$

具(202)的形式,這時

$$a_0=1;\quad \alpha=1;\quad F(z)=1;\quad \lg\varphi(z)=\lg(1+z)-z$$

由是 $p=2$, $b_0=-\frac{1}{2}$, 即 $r_0=\frac{1}{2}$。又易見 $\omega_1'=\pi$, $\omega_2'=0$。由(203)式可得:

$$\frac{e^n\Gamma(n+1)}{n^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left[\left(\frac{2}{e}\right)^n\right],$$

又因$\left(\frac{2}{e}\right)^n$ 比 $\frac{1}{n}$ 減少得快, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, 故得:

$$\frac{e^n\Gamma(n+1)}{n^{n+1}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{n^{\frac{1}{2}}}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

或 $$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-n}\left[1+n^{\frac{1}{2}}O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

或 $$\Gamma(n)=\sqrt{2\pi}\,n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]_{\circ}$$

其中剩餘項$O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$實際上應該是$O\left(\frac{1}{n}\right)$。要得到這結果可以把積分(205)分成兩部分,一從 $z=0$ 到 $z=1$, 一從 $z=-1$ 到 $z=0$, 再對每一積分應用當 $m=2$ 時的(201)式。這時對應於 $\nu=1$ 的兩項彼此相消,而我們得到如前一樣的主要項以及剩餘項 $O\left(\frac{1}{n}\right)$。

上述方法的詳情以及一般公式(201)的證明和許多例題可以在配偲的論文"函數的近似

算法"(載巴伐利亞科學院彙報 1917)中找到。

П. A. 尼克拉森夫的工作在這方面佔有重要的地位。

80. 例題 1. 考察積分

$$I=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{z+i\alpha}e^{n(z^3-z^2)}dz, \tag{206}$$

其中 α 為小正數，n 為大正數。函數 $f(z)=z^3-z^2$ 當 $z=0$ 時有極大值，而實軸是最速下降線 $v(x,y)=0$。

由這些關係可將 I 寫成下面的形式：

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{1}{z+i\alpha}e^{n(z^3-z^2)}dz+\omega, \tag{207}$$

其中

$$\omega=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{z+i\alpha}e^{n(z^3-z^2)}dz。$$

注意當 $z<0$ 時 $z^3-z^2<-z^2$，可得

$$|\omega|<\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}e^{-nz^2}dz=\frac{e^{-\frac{n}{4}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}e^{-n\left(z^2-\frac{1}{4}\right)}dz=$$

$$=\frac{e^{-\frac{n}{4}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}e^{-n\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}dz,$$

以 (-1) 代替 $z-\frac{1}{2}$ 並引進另一積分變數 $t=-\left(z+\frac{1}{2}\right)$，可得：

$$|\omega|<\frac{e^{-\frac{n}{4}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}\int_0^{\infty}e^{-nt}dt=\frac{e^{-\frac{n}{4}}}{n\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}<\frac{2e^{-\frac{n}{4}}}{n}。 \tag{208}$$

要計算(207)式右邊第一項，置 $e^{nz^3}=1+\Delta$，其中

$$\Delta=\frac{nz^3}{1!}+\frac{(nz^3)^2}{2!}+\cdots$$

由是

$$|\Delta|\leqslant n|z|^3\left(1+\frac{n|z|^3}{2!}+\frac{(n|z|^3)^2}{3!}+\cdots\right)<n|z|^3e^{n|z|^3}。 \tag{209}$$

故得：

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{1}{z+i\alpha}e^{n(z^3-z^2)}dz=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{e^{-nz^2}}{z+i\alpha}dz+\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{\Delta e^{-nz^2}}{z+i\alpha}dz。 \tag{210}$$

又設

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{e^{-nz^2}}{z+i\alpha}dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-nz^2}}{z+i\alpha}dz+\omega_1, \tag{211}$$

其中

$$|\omega_1| < \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-nz^2}dz。$$

因爲
$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-nz^2}dz = e^{-\frac{n}{4}}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-n\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\,dz,$$

或以 1 代 $z+\frac{1}{2}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-nz^2}dz < e^{-\frac{n}{4}}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-n\left(z-\frac{1}{2}\right)}\,dz = \frac{1}{n}e^{-\frac{n}{4}},$$

從而

$$|\omega_1| < \frac{2e^{-\frac{n}{4}}}{n\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}} < \frac{4}{n}e^{-\frac{n}{4}}。 \tag{212}$$

再考察(211)式右邊第一項。分被積函數爲實數和虛數部分，並注意實數部分爲奇函數，其積分之值爲零,即得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-nz^2}}{z+i\alpha}\,dz = -i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\beta^2t^2}}{t^2+1}\,dt \qquad (\beta=\alpha\sqrt{n})。$$

置 $\beta^2=\gamma$ 再求積分
$$I(\gamma)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\gamma t^2}}{t^2+1}\,dt$$

關於參數 γ 的微分,得:
$$\frac{dI(\gamma)}{d\gamma} = I(\gamma) - \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}。$$

求這微分方程的解,記住當 $\gamma=+\infty$ 時 $I(\gamma)=0$, 即得:

$$I(\beta^2) = 2\sqrt{\pi}\,e^{\beta^2}\int_{\beta}^{\infty} e^{-x^2}dx,$$

最後

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-nz^2}}{z+i\alpha}dz = -i2\sqrt{\pi}\,e^{\alpha^2 n}\int_{\alpha\sqrt{n}}^{\infty} e^{-x^2}dx。 \tag{213}$$

右邊的積分(不完全拉普拉斯積分)可由查表得到他的數值。

最後,估計(210)式右邊第一項。我們從兩方面來估計他。

應用(209)式及當 $|z|<\frac{1}{2}$ 時 $|z|^3<\frac{1}{2}|z|^2$ 的事實,有:

$$|\Delta|e^{-nz^2} < n|z|^3 e^{-\frac{n}{2}z^2},$$

由此

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{\Delta e^{-nz^2}}{z+i\alpha}\,dz\right| \leqslant \frac{2n}{\alpha}\int_0^{\frac{1}{2}} z^3e^{-\frac{n}{2}z^2}\,dz < \frac{2n}{\alpha}\int_0^{\infty} z^3e^{-\frac{n}{2}z^2}\,dz = \frac{4}{\alpha n}。 \tag{214}$$

另一方面，由不等式

$$\left|\frac{z}{z+i\alpha}\right|=\frac{|z|}{\sqrt{|z|^2+\alpha^2}}<\frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^2}} \quad 當 \quad |z|<\frac{1}{2},$$

有

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{\Delta e^{-nz^2}}{z+i\alpha}dz\right|<n\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{|z|^3}{|z+i\alpha|}e^{-\frac{n}{2}z^2}dz<\frac{2n}{\sqrt{1+4\alpha^2}}\int_0^\infty x^2e^{-\frac{n}{2}x^2}dx$$

從而

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{\Delta e^{-nz^2}}{z+i\alpha}dz\right|<\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}。\tag{214_1}$$

(213) 式的主要部分與 $\frac{1}{\alpha\sqrt{n}}$ 同階，若 α 不很小，則由(211)，(212)，(213)和(214)可得：

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{e^{-nz^2}}{z+i\alpha}dz=-i2\sqrt{\pi}e^{\alpha^2n}\int_{\alpha\sqrt{n}}^{\infty}e^{-x^2}dx+\omega',\tag{215}$$

其中

$$|\omega'|<\frac{6}{n}e^{-\frac{n}{4}}+\frac{4}{\alpha n}。\tag{216}$$

對於小正數 α 可寫：

$$|\omega'|<\frac{6}{n}e^{-\frac{n}{4}}+\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}。\tag{216_1}$$

2. 在研究漢克爾函數的漸近表示時我們必須計算積分

$$I=\int_{-\alpha-\varepsilon}^{-\alpha+\varepsilon}e^{nf(z)}dz\tag{217}$$

的近似值，其中

$$f(z)=\operatorname{sh}z-\xi z,\tag{218}$$

參數 $\xi>1$，而 n 是大正數。

(217)式中的 α 是方程 $f'(z)=0$ 的正根，亦即 $\operatorname{ch}\alpha=\xi$ 的正根。我們先設 ε 是小於 1 大於零的正數，以後再加上其他的限制。

易知(217)中的積分路線是被積函數的最速下降線的主要部分。因此積分的計算就歸到被積函數的有理表示和一些初等積分的計算了。

我們現在要用兩種方法來計算積分(217)。在第一種方法中我們祇以找出主要項和得到誤差的簡單估值爲目的。這時卻不擬考慮被積函數的幾個重要性質。

在第二種方法中我們要考慮這些性質，因而可以得到比較準確的結果。

第一種方法　將函數(218)展開爲 $x=z+\alpha$ 的冪級數：

$$f(z)=f(-\alpha)-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2!}x^2+\frac{\operatorname{ch}\alpha}{3!}x^3-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{4!}x^4+\cdots\tag{219}$$

或

$$f(z)=f(-\alpha)-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2[1+R], \tag{220}$$

其中 R 滿足下面的不等式：

$$|R|\leqslant\frac{2\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}|x|\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\right)\leqslant\frac{\operatorname{ch}\alpha}{2\operatorname{sh}\alpha}|x|, \tag{221}$$

如果 $|x|<1$。

由是(217)式中的被積函數可以寫成下面的形式：

$$e^{nf(z)}=e^{nf(-\alpha)}e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}(1+\delta_0), \tag{222}$$

其中

$$\delta_0=e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}Rx^2}-1。 \tag{223}$$

應用不等式

$$|e^y-1|\leqslant|y|e^{|y|}$$

和(221)式，對於 δ_0 可得如下的簡單估值：

$$|\delta_0|<\frac{n\operatorname{ch}\alpha}{4}|x|^3\quad e^{n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}|R|x^2}。 \tag{224}$$

將(222)式代入(217)式，得：

$$I=e^{nf(\alpha)}\left[\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}dx+\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta_0e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}dx\right]。 \tag{225}$$

再令 ε 和 n 滿足下面的兩個條件：

$$n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}\varepsilon^2=N\gg1 \tag{226}$$

和

$$\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}\varepsilon\leqslant1。 \tag{226_1}$$

當研究更準確的估計方法時我們用一個更有力的條件來代替條件 (226_1)，而(226)則維持不變。

若條件(226_1)滿足，則當 $|x|\leqslant\varepsilon$ 時 $|R|<\frac{1}{2}$，故由(224)有

$$\left|\delta_0e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}\right|<\frac{n\operatorname{ch}\alpha}{4}|x|^3e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}。\qquad(|x|<\varepsilon) \tag{224_1}$$

若條件(226)滿足，則(225)中的被積函數在積分區間的兩端取極小值。故將積分區間伸長爲無限時對於結果不發生重要的影響。下面的計算就是證明這一點的。

我們有

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}dx+\Delta_1=\sqrt{\frac{2\pi}{n\operatorname{sh}\alpha}}+\Delta_1, \tag{227}$$

其中

$$\Delta_1=-2\int_{\varepsilon}^{\infty}e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}dx,$$

又 $$|\Delta_1| = 2e^{-N}\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}(x^2-\varepsilon^2)}dx,$$

當 $x>\varepsilon$ 時有 $x^2-\varepsilon^2>(x-\varepsilon)^2$，故有：

$$|\Delta_1| < 2e^{-N}\int_0^{\infty} e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}y^2}dy = \sqrt{\frac{2\pi}{n\operatorname{sh}\alpha}}\,e^{-N}, \tag{228}$$

又由 (224_1) 有： $$\left|\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta_2 e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}dx\right| < \frac{n\operatorname{ch}\alpha}{4}2\int_0^{\infty}x^3 e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}dx$$

從而

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta_2 e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}dx\right| < \frac{2\operatorname{ch}\alpha}{\pi\operatorname{sh}\alpha}\frac{2\pi}{n\operatorname{sh}\alpha}。 \tag{229}$$

利用(225)，(227)，(228)和(229)，我們得到如下的結果：

$$I = e^{nf(-\alpha)}\sqrt{\frac{2\pi}{n\operatorname{sh}\alpha}}(1+\omega), \tag{230}$$

其中

$$|\omega| < e^{-N}+\frac{2\operatorname{ch}\alpha}{\pi\operatorname{sh}\alpha}\sqrt{\frac{2\pi}{n\operatorname{sh}\alpha}}。 \tag{231}$$

若條件(226)和(226_1)滿足，則 $|\omega|<1$。

以上的計算方法雖很粗劣，但卻很簡潔。這方法的缺點在於沒有考慮展開式(220)中正負項的交錯以及這展開式中奇數冪的存在。

我們現在來除去這些缺點。

第二種方法 把展開式(219)寫成：

$$f(x) = f(-\alpha)-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2+R_1-R_2, \tag{232}$$

其中

$$R_1 = \frac{\operatorname{ch}\alpha}{3!}x^3\left(1+\frac{x^2}{4\cdot5}+\frac{x^4}{4\cdot5\cdot6\cdot7}+\cdots\right)$$

$$R_2 = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{4!}x^4\left(1+\frac{x^2}{5\cdot6}+\frac{x^4}{5\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots\right)。 \tag{232_1}$$

最先，假設積分(217)中的 ε 祇滿足條件 $0<\varepsilon<1$。但這時已經可以知道 R_1 和 R_2 的值和他們的展開式中第一項的數值相差很小。現在被積函數可寫成：

$$e^{nf(x)} = e^{nf(-\alpha)}e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}e^{-nR_2}\left(1+\frac{nR_1}{1!}+\frac{n^2R_1^2}{2!}+\cdots\right),$$

因為 R_1 是奇函數，故有：

$$I = e^{nf(-\alpha)}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}e^{-nR_2}\left(1+\frac{n^2R_1^2}{2!}+\frac{n^4R_1^4}{4!}+\cdots\right)dx。 \tag{233}$$

現在研究

(234) $$e^{-nR_2}\left(1+\frac{n^2R_1^2}{2!}+\frac{n^4R_1^4}{4!}+\cdots\right)=$$
$$=\left(1-\frac{nR_2}{1!}+\frac{n^2R_2^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{n^2R_1^2}{2!}+\frac{n^4R_1^4}{4!}+\cdots\right)。$$

選取正數 ε，使得以下三個不等式同時成立：

(235) $$\varepsilon<1;\quad n^2R_1^2<5;\quad nR_2<1。$$

利用(232_1)可知上述不等式能成立，祇要

(235_1) $$\varepsilon<1 \quad 及 \quad \varepsilon\leqslant\left(\frac{12}{n\operatorname{ch}\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}。$$

在這時交錯級數 $$S_1=1-\frac{nR_2}{1!}+\frac{n^2R_2^2}{2!}-\cdots$$

的項減少得很快。因此

(236) $$S_1=1-nR_2+\alpha_1,$$

其中 $$0<\alpha_1<\frac{n^2R_2^2}{2}。$$

由(232_1)有：

$$1-nR_2=1-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{4!}x^4-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{6!}x^6\left(1+\frac{x^2}{7\cdot8}+\frac{x^4}{7\cdot8\cdot9\cdot10}+\cdots\right)。$$

把這式代入(236)，得到：

(237) $$S_1=1-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{4!}x^4+\delta_1,$$

其中 $$|\delta_1|=\left|\alpha_1-\frac{n\operatorname{sh}\alpha}{6!}x^6\left(1+\frac{x^2}{7\cdot8}+\cdots\right)\right|$$

在任何情形之下 $|\delta_1|$ 必小於下二值中之大者：

$$\frac{42}{41}\cdot\frac{n\operatorname{sh}\alpha}{6!}x^6 \quad 與 \quad \left(\frac{20}{19}\right)^2\frac{n^2\operatorname{sh}^2\alpha}{2(4!)^2}x^8。$$

對於以下所述的誤差而言，可證在這二數中後者的數值較大，因此可設

(238) $$|\delta_1|<\left(\frac{20}{19}\right)^2\frac{n^2\operatorname{sh}^2\alpha}{2(4!)^2}x^8。$$

對於(234)式中第二個級數：

$$S_2=1+\frac{n^2R_1^2}{2!}+\frac{n^4R_1^4}{4!}+\cdots$$

我們假設

(236_1) $$S_2=1+\frac{n^2R_1^2}{2}+\alpha_2,$$

其中 $$0<\alpha_2<\frac{6}{5}\frac{n^4R_1^4}{4!}。$$

由 (232_1) 有：
$$1+\frac{n^2R_1^2}{2}=1+\frac{n^2\operatorname{ch}^2\alpha}{2\cdot(3!)^2}x^6\left(1-\frac{x^2}{4\cdot5}+\cdots\right)^2=$$

$$=1+\frac{n^2\operatorname{ch}^2\alpha}{2\cdot(3!)^2}x^6(1+2r+r^2),$$

其中
$$r=\frac{x^2}{4\cdot5}\left(1+\frac{x^2}{6\cdot7}+\frac{x^4}{6\cdot7\cdot8\cdot9}+\cdots\right)。$$

顯然
$$r<\frac{42}{41}\cdot\frac{x^2}{4\cdot5},\quad 2r+r^2<\frac{42}{41}\cdot\frac{x^2}{10}+\left(\frac{42}{41}\right)^2\cdot\frac{x^4}{(20)^2}<\frac{11}{10}\cdot\frac{x^2}{10}。$$

因此得到：

(237_1)
$$S_2=1+\frac{n^2R_1^2}{2}+a_2=1+\frac{n^2\operatorname{ch}^2\alpha}{2\cdot(3!)^2}x^6+\delta_2,$$

其中

(238_1)
$$0<\delta_2=a_2+(2r+r^2)\frac{n^2\operatorname{ch}^2\alpha}{2\cdot6^2}x^6<\left(\frac{20}{19}\right)^4\frac{n^4\operatorname{ch}^4\alpha}{5\cdot6^3\cdot4!}x^{12}+\frac{11}{10}\frac{n^2\operatorname{ch}^2\alpha}{20\cdot6^2}x^8。$$

所以在條件 (235) 之下將 (237) 式和 (237_1) 式相乘，即得：

(239)
$$e^{-nR_1}S_2=1-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{4!}x^4+\frac{n^2\operatorname{ch}^2\alpha}{2\cdot(3!)^2}x^6+\delta,$$

其中

(239_1)
$$|\delta|<5|\delta_1|+\delta_2,$$

而 $|\delta_1|$ 和 δ_2 的估值如 (238) 與 (238_1)。現在將 (239) 式代入 (233)，得：

(240)
$$I=e^{nf(-\alpha)}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{4!}x^4+n^2\frac{\operatorname{ch}^2\alpha}{2\cdot6^2}x^6\right)e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}dx+\Delta_0+\Delta_1\right\},$$

其中

(241)
$$\Delta_0=2\int_\varepsilon^\infty\left(1-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{4!}x^4+n^2\frac{\operatorname{ch}^2\alpha}{2\cdot6^2}x^6\right)e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}dx$$

$$\Delta_1=2\int_0^\varepsilon\delta e^{-n\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}x^2}dx。$$

剩下來祇要計算 (240) 式中的積分和 (241) 式中的誤差。現在對滿足 (235_1) 的 n 和 ε 再加一個重要的條件：

(242)
$$\frac{n\operatorname{sh}\alpha}{2}\varepsilon^2=N\gg1。$$

這樣就可用初等的方法得到 (241) 式中兩個誤差的估值：

(243)
$$|\Delta_0|<\left(\frac{2}{n\operatorname{sh}\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-N}\left[1+\frac{3N^{\frac{5}{2}}\operatorname{ch}^2\alpha}{18n\operatorname{sh}^3\alpha}\right],$$

(243_1)
$$|\Delta_1|<\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{n\operatorname{sh}\alpha}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{8}+\frac{\operatorname{ch}^2\alpha}{25\operatorname{sh}^3\alpha}+\frac{\operatorname{ch}^4\alpha}{8\operatorname{sh}^4\alpha}\right),$$

但在(243)中假設 $N \geqslant 8$。

把(240)式中的積分算出來，即得下面的公式：

$$I=e^{nf(-\alpha)}\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{n\,\mathrm{sh}\,\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{8}\left(1-\frac{5}{3}\,\frac{\mathrm{ch}^2\alpha}{\mathrm{sh}^2\alpha}\right)\frac{1}{n\,\mathrm{sh}\,\alpha}+\omega'\right], \tag{244}$$

其中

$$|\omega'|\leqslant\frac{e^{-N}}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{N^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{ch}^2\alpha}{6n\,\mathrm{sh}^3\alpha}\right)+\left(\frac{2}{n\,\mathrm{sh}\,\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{8}+\frac{\mathrm{ch}^2\alpha}{25\,\mathrm{sh}^2\alpha}+\frac{\mathrm{ch}^4\alpha}{8\,\mathrm{sh}^4\alpha}\right)。 \tag{245}$$

(244)和(245)是在(243)和(243_1)成立之下纔得到的。以下再設

$$\varepsilon=\left(\frac{12}{n\,\mathrm{ch}\,\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}。 \tag{246}$$

由(242)式有：

$$n\,\mathrm{sh}\,\alpha=\frac{N^3\,\mathrm{ch}^2\alpha}{18\,\mathrm{sh}^2\alpha} \tag{247}$$

或

$$\frac{N^{\frac{5}{2}}\mathrm{ch}^2\alpha}{6n\,\mathrm{sh}^3\alpha}=\frac{3}{\sqrt{N}}。 \tag{247_1}$$

由(245)可知若取 $N=8$，則這式右邊第二項的數值必大於第一項的數值。

因此如果取 $N \geqslant 8$，則關於誤差的估計可以改寫爲：

$$|\omega'|<2\left(\frac{2}{n\,\mathrm{sh}\,\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{8}+\frac{\mathrm{ch}^2\alpha}{25\,\mathrm{sh}^2\alpha}+\frac{\mathrm{ch}^4\alpha}{8\,\mathrm{sh}^4\alpha}\right)。 \tag{248}$$

應用這估計的條件是 $N \geqslant 8$，這條件也可改寫爲：

$$n^{\frac{1}{3}}\mathrm{sh}\,\alpha\geqslant\frac{8}{\sqrt[3]{18}}\,\mathrm{ch}^{\frac{2}{3}}\alpha$$

或

$$n^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{sh}\,\alpha>3\,\mathrm{ch}^{\frac{2}{3}}\alpha。 \tag{249}$$

在第六章中講貝塞爾函數時我們將要用到上面所得的結果，那時設

$$\mathrm{ch}\,\alpha=\frac{p}{z},\quad n=z$$

其中 p 是貝塞爾函數的足標，z 是變數。

那時 $z\,\mathrm{sh}\,\alpha=\sqrt{p^2-z^2}$，而(249)呈下面的形式：

$$\sqrt{p^2-z^2}\geqslant 3p^{\frac{2}{3}}。 \tag{249_1}$$

若要求 $p>\sqrt{p^2-z^2}$，則顯知要條件(249_1)滿足必須 $p>p_0$，其中 $p_0=3p_0^{\frac{2}{3}}$，即 $p_0=27$。在更準確的計算中這界限可以稍稍降低一點。

名 詞 對 照 表 I.

А

абсолютная сходимость, 絕對收斂
абсолютное значение, 絕對值
алгебраическое дополнение, 代數餘因子
аналитическая функция, 解析函數
аналитическое представление, 解析表示
аналитическое продолжение, 解析延拓
аргумент, 幅角; 變數

Б

бесконечная область, 無界區域
бесконечная часть, 無限部分
бесконечно далекая точка, 無限遠點
бесконечность, 無限, 無窮
бесконечное произведение, 無窮乘積
бесконечный ряд, 無窮級數
бигармоническое уравнение, 重調和方程

В

вектор, 向量
векторная интерпретация, 向量解釋法
верхний предел, 上限
ветвь, 支, 支頁
вещественная ось, 實軸
вещественная переменная, 實變數
вещественная часть, 實數部分
вещественное число, 實數
вихрь, 渦旋
внешная обьемная сила, 體力
внешний контур, 外圍境界線
внутренний контур, 內圍境界線
внутренная точка, 內點
возмущение, 攪擾
волна, 波, 波動
волновое уравнение, 波動方程
выражение, 式, 表示
вычет, 留數

Г

гармоническая функция, 調和函數
геометрическая интерпретация, 幾何解釋法
геометрическая прогрессия, 幾何級數
гидродинамика, 流體力學
главная часть, 主要部分
главное значение, 主值
голоморфная функция, 全純函數
граница, 境界線

Д

двойный интеграл, 二重積分
двулистная область, 雙葉區域
двуугольник, 二角形
двухсвязная область, 雙連通區域
диаметр, 直徑
диполь, 重源
дифференцирования, 微分
диффракция, 繞射
дробная функция, 分函數
дробно-линейное преобразование, 分式線性變換
дуга, 弧
дыра, 孔

Е

единичный круг, 單位圓

Ж

Жордан, 約當

З

задача Гильберта, 希爾伯脫問題
задача Дирихле, 狄義赫利問題
замкнутая область, 閉區域
знакопеременный ряд, 交錯級數
знаменатель, 分母
значок, 足標

И

изолированная особая точка, 孤立奇異點
изотермическая сетка, 等溫網
интеграл Лебега, 勒貝格積分
интеграл типа Коши, 勾犀型積分
интеграл Френеля, 夫雷內爾積分
источник, 源頭
источник колебания, 震源

К

касательная, 切線
квадрат, 正方形
квадратное уравнение, 二次方程
кольцо, 環
комплексная переменная, 複變數
комплексное число, 複數
комплексное сопряженное число, 共軛複數
комплексный потенциал течения, 流之複勢
конический пучок, 錐形束
контур, 線路, 境界線
контурный интеграл, 路積分
конформное преобразование, 保角變換
корень, 根, 零點
координата, 坐標
коэффициент, 係數
коэффициент подобия, 相似係數
коэффициент Тэйлора, 泰勒係數
Коши, 勾犀
криволинейный интеграл, 線積分
критический луч, 臨界放射線
круг сходимости, 收斂圓

Л

Лаплас, 拉普拉斯
лемма, 輔助定理
линейное преобразование, 線性變換
линейный размер, 線性度量
линия тока, 流線
логарифмическая производная, 對數導數
ломаная-линия, 折線
луч, 放射線

М

магнитная проницаемость, 導磁係數
мероморфная функция, 半純函數
метод скорейшего спуска, 最速下降法
минимальное свойство, 極小性質
Миттаг-Леффлер, 米他格·李佛
мнимая ось, 虛軸
мнимая часть, 虛數部分
мнимое число, 虛數
многозначная функция, 多值函數
многосвязная область, 複通區域
многоугольник, 多角形
множитель, 乘數
модуль, 模
монотонно возрастающая функция, 單調增加函數
монотонно убывающая функция, 單調減少函數

Н

напряжение, 應變
направляющая, 底線
Нарышкина, Е. А., Е. А. 納雷舒金那
независимая переменная, 自變數
Некрасов, П. А., П. А. 尼克拉塞夫
необходимое и достаточное условие, 充要條件
неравенство, 不等式
непрерывная функция, 連續函數
несжимаемая жидкость, 不可壓縮液體
несобственный интеграл, 廣義積分
несократимая дробь, 不可約分數
нуль, 零
Ньютон, 牛頓
нормаль, 法線
нечетное, 奇數

О

область, 區域
образующая, 母線
обращение степенного ряда, 冪級數之反演
обтекание, 環流
обратная круговая функция, 反三角函數
однозначная функция, 單值函數
односвязная область, 單通區域
окрестность, 鄰域
окружность, 圓周
определенный интеграл, 定積分
определитель, 行列式
особая точка, 奇異點
ось, 軸
отверстие, 孔
отношение, 比率
отображение, 反射
отражение, 反射
отраженный продольный потенциал, 反射縱波勢
отраженный поперечный потенциал, 反射橫波勢
отрезка, 線段
оценка, 估值, 估計

П

параллельный перенос, 平行移動
параметрическое уравнение, 參數方程
первообразная функция, 原函數
переменная, 變數
периметр, 周長
период, 週期
периодическая функция, 週期函數
плоскость, 平面
плоское поле, 平面場
плоское течение, 平面流
плотность, 密度
подинтегральная функция, 被積函數
показатель, 指數
показательная функция, 指數函數
полоса, 帶域
полюс, 極點
полное обтекание, 完全環流
поверхностная волна, 曲面波
поверхность, 曲面
полином, 多項式
последовательность, 數列
порядок, 階
полярная координата, 極坐標
последовательное приближение, 逐次迫近法
постоянный, 常數
потенциал продольной волны, 縱波勢
потенциал поперечной волны, 橫波勢
потенциал скорости, 速勢
поток тепла, 熱流

правило Лопиталя, 洛畢達定則
предел, 極限
предельное положение, 極限位置
преобразование, 變換
преобразование подобия, 相似變換
преобразование Лапласа, 拉普拉斯變換
предельная задача, 邊値問題
предельное условие, 邊値條件
признак Коши существования предела, 勾犀判別極限存在的準則
признак Даламбера, 達朗倍爾判定法
принцип наложения, 疊合原理
принцип перманентности, 不變原理
принцип симметрии, 對稱原理
произведение, 積
производная, 導數
приращение, 改變量
принцип модуля, 模數原理
промежуток, 區間
простой полюс, 單極點
простой корень, 單零點, 單根
проводник, 導體
прямоугольник, 長方形
прямолинейные прямоугольные оси, 直角坐標
пучок, 束

Р

равенство, 等式
равномерная сходимость, 一致收斂
равномерная непрерывность, 一致連續
равнобочная гипербола, 等軸雙曲線
радиус, 半徑
радиус сходимости, 收斂半徑
разрывная функция, 間斷函數
разность, 差
радикал, 根號, 根式
разрез, 割線
расходящийся ряд, 發散級數
расстояние, 距離
рациональная функция, 有理函數
рациональная дробь, 有理分式
регулярная функция, 正則函數
решение, 解
Риман, 黎曼
риманова поверхность, 黎曼曲面
ряд, 級數
ряд Тейлора, 泰勒級數
ряд Лорана, 羅朗級數
ряд Маклорена, 麥克勞林級數

С

связность области, 區域之連通性
седловая точка, 鞍點
сетка, 網
сетка кривых, 曲線網
сетка прямых, 直線網
силовая линия, 力線
скалярный потенциал, 無向勢
скобка, 括弧
слагаемое, 項
сложная функция, 複合函數
смещения, 位移
софокусные эллипсы, 共焦點橢圓
софокусные гиперболы, 共焦點雙曲線
сопряженный ряд, 共軛級數
среда, 介質
среднее значение, 平均値
Соболев, С. Л., С. Л. 索伯列夫
степенная функция, 冪函數
степенный ряд, 冪級數
сток, 尾閭
сторона, 邊
сумма, 和
существенно особая точка, 本性奇異點
сходящийся ряд, 收斂級數

Т

теорема Абеля, 阿貝爾定理
теорема Вейерштрасса, 維爾史特拉斯定理
теорема вычетов, 留數定理
теорема Гарнака, 哈爾諾克定理
теорема Коши, 勾犀定理
теорема однозначности, 單值定理
теорема Пикара, 匹卡定理
теорема Римана, 黎曼定理
теорема Привалова, 伯利華洛夫定理
теорема Руше, 盧捨定理
типа, 類型
точка, 點
точка разветвления, 支點
точка контура, 境界點
траектория, 軌道
тригонометрический ряд, 三角級數
тригонометрическая функция, 三角函數

У

угол, 角
угол поворота, 迴轉角
угловая точка, 角點
упругая волна, 彈性波
уменьшаемое, 被減數
уравнение, 方程
уравнение гидродинамика, 流體運動方程
уравнение замкнутости, 封閉性方程
уравнения Коши-Римана, 勾犀·黎曼方程
уравнение непрерывности, 連續方程
уравнение Лапласа, 拉普拉斯方程
условие Липшица, 黎浦希茲條件

Ф

фокус, 焦點
формула Валлиса, 華力斯公式
формула бинома, 二項式公式
формула Гурса, 古刹公式
формула Гильберта, 希爾伯脫公式
формула Коши, 勾犀公式
формула Крамера, 克拉梅公式
формула Кристоффеля, 克利斯多夫公式
формула Стирлинга, 史斗林公式
формула суммирования Эйлера, 尤拉求和公式
формула Жуковского, 朱可夫斯基公式
формула Тэйлора, 泰勒公式
формула удвоения, 加倍公式
формула Шварца, 舒伐爾茲公式
фронт волны, 波前
функция комплексного переменного, 複變數函數
функция Бесселя, 貝塞爾函數
функция превосходящая, 強函數
функция тока, 流函數
функция Ханкеля, 漢克爾函數
функциональный определитель, 函數行列式

Х

характерное свойство, 特徵性質
хорда, 弦

Ц

целая функция, 整函數
центр подобия, 相似中心

Ч

частная производная, 偏導數
частное, 商
чертеж, 圖形
четное, 偶數

числа Бернулли, 白諾利數

числитель, 分子

член, 項

Э

эквипотенциальная линия, 等勢線

экземпляр, 模型

Эйлеров интеграл второго рода, 第二類尤拉積分

Эйлеров интеграл первого рода, 第一類尤拉積分

элемент, 元素

элемент дуги, 弧單元

элемент площади, 面積單元

элементарная плоская волна, 初等平面波

элементарный вихрь, 初等渦旋

элементарный потенциал, 基勢

элементарная функция, 初等函數

Я

ядро Коши, 勾西核

ядро Гильберта, 希爾伯脫核

名 詞 對 照 表 II.

一 畫

一致收歛, равномерная сходимость
一致連續, равномерная непрерывность

二 畫

二重積分, двойный интеграл
二角形, двуугольник
二次方程式, квадратное уравнение
力線, силовая линия
二項式公式, формула бинома

三 畫

上限, верхний предел
下限, нижний предел
三角級數, тригонометрический ряд
三角函數, тригонометрическая функция

四 畫

內點, внутренная точка
內圍境界線, внутренний контур
支, 支頁, ветвь
支點, точка разветвления
分函數, дробная функция
分母, знаменатель
分子, числитель
分式線性變換, дробно-линейное преобразование
元素, элемент
尤拉求和公式, формула суммирования Эйлера
勾犀, Коши
勾犀公式, формула Коши
勾犀定理, теорема Коши
勾犀型積分, интеграл типа Коши
勾犀·黎曼方程, уравнения Коши-Римана
方程, уравнение
介質, среда
匹卡定理, теорема Пикара
不等式, неравенство
不可壓縮液體, несжимаемая жидкость
不可約分數, несократимая дробь
不變原理, принцип перманентности
孔, отверстие, дыра
比率, отношение
反射, отображение, отражение
反射縱波勢, отраженный продольный потенциал
反射橫波勢, отраженный поперечный потенциал
反三角函數, обратная круговая функция
夫雷內爾積分, интеграл Френеля
牛頓, Ньютон
勾犀核, ядро Коши

五 畫

代數餘因子, алгебраическое дополнение
外圍境界線, внешний контур
白諾利數, числа Бернулли
主值, главное значение
主要部分, главная часть
正方形, квадрат
正交, ортогональный
切線, касательная
半徑, радиус
半純函數, мероморфная функция

尼克拉塞夫, П. А. Некрасов
母線, образующая
平行移動, параллельный перенос
平面, плоскость
平面場, плоское поле
平面流, плоское течение
正則函數, регулярная функция
平均値, среднее значение
本性奇異點, существенно особая точка
古利公式, формула Гурса
史斗林公式, формула Стирлинга
加倍公式, формула удвоения

六 畫

向量, вектор
向量解釋法, векторная интерпретация
全純函數, голоморфная функция
式, выражение
交錯級數, знакопеременный ряд
共軛複數, комплексное сопряженное число
共軛級數, сопряженный ряд
共焦點橢圓, софокусные эллипсы
共焦點雙曲線, софокусные гиперболы
收斂圓, круг сходимости
收斂半徑, радиус сходимости
收斂級數, сходящийся ряд
米他格·李佛, Миттаг-Леффлер
多值函數, многозначная функция
多角形, многоугольник
多項式, полином
自變數, независимая переменная
充要條件, необходимое и достаточное условие
行列式, определитель
曲面, поверхность
曲面波, поверхностая волна
曲線網, сетка кривых
有理函數, рациональная функция
有理分式, рациональная дробь
朱可夫斯基公式, формула Жуковского

七 畫

希爾伯脫問題, задача Гильберта
希爾伯脫核, ядро Гильберта
希爾伯脫公式, формула Гильберта
狄義赫利問題, задача Дилихле
記標, значок
坐標, координата
折線, ломаная-линия
估値, 估計, оценка
完全環流, полное обтекание
束, пучок
位移, смещения
尾閭, сток
伯利華洛夫定理, теорема Привалова
角, угол
角點, угловая точка
貝塞爾函數, функция Бесселя
改變量, приращение
克拉每公式, формула Крамера
克利斯多夫公式, формула Кристоффеля
初等函數, элементарная функция
初等平面波, элементарная плоская волна
初等渦旋, элементарный вихрь

八 畫

波, 波動, волна
波動方程, волновое уравнение
波前, фронт волны
直徑, диаметр
直角坐標, прямолинейные прямоугольные оси
直線網, сетка прямых
弦, хорда

面積單元, элемент площади
弧, дуга
弧單元, элемент дуги
孤立奇異點, изолированная особая точка
拉普拉斯, Лаплас
拉普拉斯變換, преобразование Лапласа
拉普拉斯方程, уравнение лапласа
放射線, луч
奇數, нечетное
法線, нормаль
定積分, определенный интеграл
奇異點, особая точка
周長, периметр
長方形, прямоугольник
函數行列式, функциональный определитель
和, сумма
亞貝爾定理, теорема Абеля

九畫

重調和方程, бигармоническое уравнение
重源, диполь
約當, Жордан
保角變換, конформное преобразование
係數, коэффициент
相似係數, коэффициент подобия
相似變換, преобразование подобия
相似中心, центр подобия
指數, показатель
指數函數, показательная функция
括弧, скобка
哈爾諾克定理, теорема Гарнака
軌道, траектория
迴轉角, угол поворота
封閉性方程, уравнение замкнутости

十畫

留數, вычет
留數定理, теорема вычетов
流體力學, гидродинамика
流之複勢, комплексный потенциал течения
泰勒級數, ряд Тейлора
泰勒係數, коэффициент Тэйлора
泰勒公式, формула Тейлора
流線, линия тока
流體運動方程, уравнение гидродинамики
流函數, функция тока
閉區域, замкнутая область
根, корень
根號, 根式, радикал
乘數, множитель
原函數, первообразная функция
被積函數, подинтегральная функция
被減數, уменьшаемое
差, разность
級數, ряд
特徵性質, характерное свойство

十一畫

勒貝格積分, интеграл Лебега
虛軸, мнимая ось
虛數, мнимое число
虛數部分, мнимая часть
基線, направляющая
基勢, элементарный потенциал
連續函數, непрерывная функция
區域, область
區間, промежуток
參數方程, параметрическое уравнение
密度, плотность
帶域, полоса
敍列, последовательность
逐次逼近法, последовательное приближение
常數, постоянный

速勢, потенциал скорости
區域之連通性, связность области
麥克勞林級數, ряд маклорена
間斷函數, разрывная функция
連續方程, уравнение непрерывности
強函數, функция превосходящая
偏導數, частная производная
偶數, четное
商, частное
第二類尤拉積分, Эйлеров интеграл второго рода
第一類尤拉積分, Эйлеров интеграл первого рода

十 二 畫

絕對值, абсолютное значение
絕對收斂, абсолютная сходимость
無限, 無窮, бесконечность
無界區域, бесконечная область
無限部分, бесконечная часть
無限遠點, бесконечно далекая точка
無窮乘積, бесконечное произведение
無窮級數, бесконечный ряд
無向勢, скалярный потенциал
幾何解釋法, геометрическая интерпретация
幾何級數, геометрическая прогрессия
單位圓, единичный круг
單調增加函數, монотонно возрастающая функция
單調減少函數, монотонно убывающая функция
單值函數, однозначная функция
單連區域, односвязная область
單極點, простой полюс
單零點, 單根 простой корень
單值定理, теорема однозначности
單葉區域, однолистная область

等式, равенство
等溫網, изотермическая сетка
等軸雙曲線, равнобочная гипербола
等勢線, эквипотенциальная линия
渦旋, вихрь
輔助定理, лемма
最速下降法, метод скорейшего спуска
軸, ось
階, порядок
週期, период
週期函數, периодическая функция
割線, разрез
距離, расстояние
發散級數, расходящийся ряд
項, слагаемое, член
焦點, фокус
舒伐爾茲公式, формула Шварца
黎浦希茲條件, условие Липшица

十 三 畫

解析函數, аналитическая функция
解析表示, аналитическое представление
解析延拓, аналитическое продолжение
解, решение
微分, дифференцирования
微擾, возмущение
路積分, контурный интеграл
零點, корень
零, нуль
源頭, источник
極小性質, минимальное свойство
極坐標, полярная координата
極點, полюс
極限, предел
極限位置, предельное положение
圓周, окружность
達朗倍爾判定法, признак Даламбера
疊合原理, принцип наложения